

Phasenübergänge und kritische Dynamik in endlichen Volumina

Theoretisch-Physikalisches Institut
Quantenfeldtheorie



Vorgelegt von:	Piotr Piasecki
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Holger Gies
Zweiter Gutachter:	Dr. Jens Braun

Diplomarbeit vorgelegt von Piotr Piasecki, geboren in Warschau, Polen.

15. Mai 2010.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Renormierungsgruppenflussgleichung	8
3	Spontane Symmetriebrechung	15
3.1	Lineares Sigma-Modell	15
3.2	Nambu-Jona-Lasinio-Modell	17
4	Thermische Feldtheorie	23
4.1	Thermische Feldtheorie für Bosonen	23
4.2	Thermische Feldtheorie für Fermionen	27
4.3	Thermische Feldtheorie und Phasenübergänge	29
5	Kritische Phänomene und Scaling-Funktionen	32
5.1	Phasenübergänge und kritische Exponenten	32
5.2	Scaling-Funktionen in unendlichem Volumen	34
5.3	Scaling-Funktionen in endlichem Volumen	36
6	$O(N)$-Modell	38
6.1	Flussgleichungen für das symmetrische und gebrochen-symmetrische Regime	38
6.2	Numerische Lösungen des $O(N)$ -Modells bei endlicher Temperatur	40
6.3	Gültigkeitsgrenzen des $O(N)$ -Modells	47
7	Quark-Meson-Modell in unendlichem Volumen	50
7.1	Flussgleichung für das Quark-Meson-Modell in unendlichem Volumen . . .	50
7.2	Numerische Lösungen	53
7.3	Cutoff-Effekte	61
7.4	Trunkierungs-Effekte	63
7.5	Scaling in unendlichem Volumen	68
8	Quark-Meson-Modell in endlichem Volumen	74
8.1	Flussgleichung für das Quark-Meson-Modell in endlichem Volumen . . .	74
8.2	Vergleich zwischen endlichem und unendlichem Volumen	77
8.3	Thermodynamik in endlichem Volumen	83
8.4	Scaling in endlichem Volumen	88

Inhaltsverzeichnis

8.5 Vergleich mit Gittersimulationen	96
9 Zusammenfassung und Ausblick	99
Literatur	102

1 Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD), die Theorie der Starken Wechselwirkung, beschreibt die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen. Quarks sind die kleinsten Materiebausteine, aus denen Hardronen wie z.B. Protonen und Neutronen zusammengesetzt sind. Die Starke Wechselwirkung ist dafür verantwortlich, dass Quarks Bindungszustände eingehen, die eben die Hardronen konstituieren. Es existieren, soweit wir heute wissen, sechs unterschiedliche Quark-Sorten (Flavors): up-, down-, strange-, charme-, bottom- und top-Quark.

In Teilchenbeschleunigerexperimenten fand man das Δ^{2+} -Hardron mit Spin $\frac{3}{2}$, das aus drei up-Quarks besteht [1]. Nach dem Pauli-Prinzip muss es also noch einen weiteren Freiheitsgrad geben, der diese drei Quarks unterscheidbar macht. Daher tragen Quarks sogenannte Farbladungen (color), derer es insgesamt drei gibt. Die Wechselwirkungen zwischen den Quarks werden durch die Gluonen vermittelt, die ihrerseits untereinander wechselwirken, da die Gluonen selbst farbgeladen sind. Das ist ein folgenreicher Unterschied zur Quantenelektrodynamik, der Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung. Diese wird durch Photonen zwischen allen elektrischen geladenen Teilchen (Hardronen und Leptonen gleichermaßen) vermittelt. Die Photonen sind dabei selbst elektrisch ungeladen.

Charakteristisch für die QCD sind die beiden Phänomene Confinement und Asymptotische Freiheit. Unter ersterem versteht man die Tatsache, dass das Wechselwirkungspotential zwischen den Quarks mit zunehmendem Abstand linear anwächst. Daraus folgt, dass man unendlich viel Energie aufwenden müsste, um zwei Quarks zu separieren. Daher kommen Quarks und Gluonen in der Natur nur im gebundenen Zustand vor [2]. Die QCD bezeichnet man als asymptotisch frei, da die Kopplung der Wechselwirkung zwischen den Quarks für kleine Abstände oder große Impulsüberträge sehr klein wird [3, 4]. In diesem Regime ist die QCD perturbativen Methoden zugänglich. Für den Fall großer Abstände oder kleiner Impulsüberträge wird die Kopplung sehr groß [5] und man ist auf nicht-perturbative Methoden angewiesen. Für hohe Temperaturen erwartet man, dass die Quarks und Gluonen ein Quark-Gluon-Plasma bilden, in dem diese sich quasi-frei bewegen können. Zwischen dem Confinement-Zustand und dem Plasma-Zustand gibt es einen Phasenübergang, der bei einer kritischen Temperatur T_c stattfindet. Man nennt diesen Phasenübergang Confinement/Deconfinement-Phasenübergang.

Für den Grenzfall verschwindender Quarkmassen gibt es einen zweiten Phasenübergang in der QCD, den sogenannte chiralen Phasenübergang. Für masselose Quarks und tiefe Temperaturen ist die chirale Symmetrie der QCD spontan gebrochen. Die chirale Symmetrie wird allerdings bei hohen Temperaturen oberhalb einer kritischen Temperatur

wiederhergestellt. Wir haben also einen Phasenübergang von einem Regime mit gebrochener chiraler Symmetrie in ein Regime mit wiederhergestellter chiraler Symmetrie. Eine explizit vorgegebene Quarkmasse bricht die chirale Symmetrie. Allerdings kann man weiterhin approximativ von einer chiralen Symmetrie sprechen, wenn man nur das up- und down-Quark betrachtet, da diese beiden Quarks nur eine sehr geringe Masse aufweisen, die viel kleiner ist als die relevante Skala der QCD, $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV}$.

In der Nähe eines Phasenübergangs zeigen physikalische Systeme unterschiedlicher Art kritisches Verhalten, d.h. die Observablen skalieren in der Nähe der kritischen Temperatur mit einfachen Potenzgesetzen $\propto |T - T_c|^\#$, wobei $\#$ die den Observablen zugehörigen kritischen Exponenten angeben. Haben verschiedene physikalische System dieselben kritischen Exponenten, so sagt man beide Systeme gehören zur selben Universalitätsklasse. Das bedeutet, dass verschiedene physikalische Systeme in der Nähe des jeweiligen Phasenübergangs identisches Verhalten zeigen, obgleich ihr Verhalten weit weg von Phasenübergang unterschiedlich sein kann. Die Werte für die kritischen Exponenten hängen dabei von den Symmetrien und der Dimension des betrachteten physikalischen Systems ab.

Die genaue Natur des chiralen Phasenübergang in der QCD ist noch nicht endgültig geklärt. Um sich der Antwort dieser Frage anzunähern, ist es zweckmäßig, mit effektiven Modellen zu arbeiten. Diese haben den Vorteil, dass sie nur für das Problem notwendige Freiheitsgrade berücksichtigen. Ein solches Modell ist dann in der Regel einfacher handhabbar. Ist bekannt in welche Universalitätsklasse das betrachtete effektive Modell gehört, so lassen sich möglicherweise Rückschlüsse ziehen hinsichtlich der Universalitätsklasse der vollen QCD. Gittersimulationen deuten darauf hin, dass QCD mit zwei Flavours (up- und down-Quark) in die Universalitätsklasse $O(4)$ gehört [6, 7, 8, 9]. Um die Dynamik der QCD in der Nähe des chiralen Phasenübergangs zu studieren, bietet sich daher das chiral- und $O(4)$ -symmetrische Quark-Meson Modell als effektives Modell an.

Dass die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Quarks bei kleiner werdenden Impulsüberträgen anwächst, hat zur Folge, dass die QCD bei kleinen Energien nicht perturbativ behandelt werden kann. Man ist also notwendigerweise auf nicht-perturbative Methoden angewiesen. Ein nicht-perturbativer Zugang zur Quantenfeldtheorie besteht z.B. darin, QCD auf einem endlichen Raum-Zeit-Gitter zu studieren. Das hat den Vorteil, dass man nicht auf vereinfachende Modellannahmen angewiesen ist. Andererseits ist die Gitter-QCD mit hohem numerischen Aufwand verbunden. Beispielsweise ist die Implementierung von chiralen Fermionen schwierig, ohne dass ihre Chiralitätseigenschaft verloren geht. Des weiteren ist die Rechendauer um so größer, je kleiner die gewählte explizite Quarkmasse ist. Daher werden Gittersimulationen mit großen expliziten Quarkmassen durchgeführt, so dass die chirale Symmetrie explizit gebrochen ist. Der chirale Phasenübergang geht dann in einen Crossover über. Folglich ist es schwierig, in Gittersimulationen kritisches Verhalten nahe am Phasenübergang zu beobachten und die genaue Natur des Phasenübergangs zu klären.

Ein anderer nicht-perturbativer Zugang zur Quantenfeldtheorie ist die Renormierungsgruppe. Dieser Zugang hat den Vorteil, dass ohne Schwierigkeiten chirale Fermionen implementiert werden können. Des weiteren ist es möglich mit verschwindender expliziter Symmetriebrechung zu arbeiten. Dadurch ist es möglich kritische Exponenten zu berechnen und kritisches Verhalten (Scaling) zu beobachten. Im Unterschied zu Gitter-Simulationen können auch Rechnungen in unendlichen Volumina durchgeführt werden, während bei Gittersimulationen entsprechende Resultate nur durch Extrapolation auf unendliche Volumina zu erhalten sind. Ein Nachteil der Renormierungsgruppe ist, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, das gegebene Modell als Ganzes zu lösen, man ist auf Näherungen (Trunkierungen) angewiesen. Gitter-Simulationen und Renormierungsgruppe verhalten sich also zueinander komplementär. Das ermöglicht, dass beide nicht-perturbativen Zugänge einander ergänzen können.

Um kritische Dynamik und das Scaling-Verhalten von QCD in der Nähe des chiralen Phasenübergangs zu studieren, betrachten wir in dieser Arbeit ein Quark-Meson-Modell mit zwei Flavors, up- und down-Quark, und drei Farbfreiheitsgraden. Diese Fermionen koppeln dabei über die Yukawa-Kopplung an ein Bosonenfeld $\vec{\phi} = (\vec{\pi}, \sigma)$, bestehend aus drei masselosen Pionfeldern $\vec{\pi}$ und einem massiven Sigmafeld σ . Wir vernachlässigen in dieser Arbeit die impulsabhängige Wellenfunktionsrenormierung $Z_{\phi,p,k} \stackrel{!}{=} 1 \stackrel{!}{=} Z_{\psi,p,k}^1$.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert: Wir resümieren im ersten Kapitel Grundlagen zur Renormierungsgruppe [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Im zweiten Kapitel wird das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung am Beispiel des $O(N)$ -und Nambu-Jona-Lasinio-Modells dargestellt [17, 18, 19, 20]. Letzteres kann durch eine Hubbard-Stratonovich (Bosonisierung) in das Quark-Meson-Modell überführt werden. Um Phasenübergänge und kritische Phänomene des Quark-Meson-Modells bei endlichen Temperaturen studieren zu können, beschäftigen wir uns im vierten Kapitel mit thermischer Feldtheorie [21, 22, 23, 24, 25] und im fünften Kapitel mit Grundlagen von kritischem Verhalten, kritischen Exponenten und Scaling-Funktionen [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Wir wenden uns zunächst im sechsten Kapitel dem $O(4)$ -Modell zu, da dieses die rein mesonischen Anteile des Quark-Meson-Modells beschreibt. Wir lösen das $O(4)$ -Modell mit Hilfe der Renormierungsgruppe für endliche Temperaturen und werten die numerischen Ergebnisse aus. Analog verfahren wir im siebten Kapitel mit dem Quark-Meson-Modell in unendlichem Volumen und im achten in endlichem Volumen. Anschließend folgt ein Vergleich unserer Ergebnisse mit Ergebnissen von QCD-Gitter-Simulationen.

¹Mit $Z_{\phi,p,k} \stackrel{!}{=} 1$ ergibt sich für die anomale Dimension η : $\eta \propto \partial_t \log Z_{\phi,p,k} = 0$.

2 Renormierungsgruppenflussgleichung

Physikalische Systeme sind oftmals durch eine sehr hohe Anzahl an Freiheitsgraden charakterisiert. Allerdings hängt die notwendig zu berücksichtigende Anzahl von der Skala ab, an der man das gegebene physikalische System betrachtet. Für die Beschreibung eines idealen Gases ist es also keineswegs notwendig, die Wellenfunktion jedes einzelnen Atoms zu berechnen, um das physikalische Verhalten desselben zu erfassen. Die Parameter eines makroskopischen Systems lassen sich häufig durch das Betrachten eines kleineren Teilsystems ermitteln. Betrachtet man z.B. ein Gas, bestehend aus 10^5 Atomen, so weist dieses Gas in der Regel bereits den gleichen Druck und die gleiche Temperatur auf wie das Gesamtsystem von 10^{23} Atomen. Wenn man allerdings dieses Teilsystem immer weiter verkleinert, dann ändert sich das Verhalten dieses System qualitativ.

Doch wodurch ändert sich das System qualitativ, wenn es verkleinert wird? Die hierbei relevante Größe ist die Korrelationslänge der Freiheitsgrade. Sind die Ausdehnung des Systems und die Korrelationslänge der relevanten Freiheitsgrade von gleicher Größenordnung, so ist eine Verhaltensänderung des Systems zu erwarten. Dies gilt erst recht, wenn die Korrelationslänge größer wird als die Ausdehnung des Systems. Ist die Korrelationslänge sehr klein, d.h. spielen nur kurzreichweitige Wechselwirkungen eine wesentliche Rolle, dann ist das betreffende System störungstheoretischen Methoden zugänglich. Bei Phasenübergängen 2. Ordnung divergiert¹ allerdings die Korrelationslänge, was die Notwendigkeit nicht-perturbativer Methoden aufzeigt.

Wie sich ein physikalisches System verhält, hängt auch von der Anzahl der Freiheitsgrade innerhalb der Korrelationslänge ab. Ist die Anzahl der Freiheitsgrade sehr groß, dann ist das Verhalten dieses Systems bestimmt durch das kollektive makroskopische Verhalten der Freiheitsgrade, und weit weniger von den mikroskopischen Wechselwirkungen.

Wenn man z.B. ein Ising-Modell in der Nähe des kritischen Phasenübergang anschaut, so kann man einzelne Regionen betrachten, die eine bestimmte Anzahl von Spin-up- und Spin-down-Zuständen enthalten und ersetzt diese durch einen effektiven Spin, welcher dann der Region als ganzes zugeordnet wird. Durch diese Blockspintransformation erhält man eine effektive Theorie, welche interpoliert zwischen dem rein mikroskopischen und dem rein makroskopischen System.

Die Idee der Renormierungsgruppe besteht darin, sukzessive die Anzahl der Freiheitsgrade zu verringern und diese durch effektive Freiheitsgrade zu ersetzen. In der Quan-

¹Ist das Volumen des Systems endlich, so divergiert die Korrelationslänge nicht, sondern hat statt einer Singularität ein Maximum.

tenfeldtheorie entspricht der Blockspintransformation die sukzessive Ausintegration von Impulsmoden in der Zustandssumme Z . Zu diesem Zweck wird eine Skala k eingeführt, mit deren Hilfe die Impulsmoden des Feldes $\phi(p)$ unterteilt werden in niederfrequente $p < k$ und hochfrequente $p > k$ Moden:

$$\phi(p) = \phi(p < k) + \phi(p > k). \quad (2.1)$$

Die Skala k wird nun schrittweise um das Intervall Δk zu abgesenkt, wobei alle Freiheitsgrade im entsprechenden Intervall Δk ausintegriert werden. Durch Ausintegration erhalten wir eine effektive Theorie, die durch einen effektiven Lagrangian \mathcal{L}_{eff} beschrieben wird. Diese Ausintegration kann natürlich iterativ ausgeführt werden. Was wir dann erhalten sind effektive Wirkungen bei unterschiedlichen Skalen - wird die Skala geändert, ändert sich auch die effektive Wirkung des Systems.

Ändert sich die effektive Wirkung nicht mehr durch Ausführung eines weiteren Integrationsschrittes, so redet man von einem Fixpunkt. Ein nichttrivialer Fixpunkt² weist auf das Auftreten langreichweitiger Korrelationen hin. Eine mögliche Konsequenz ist die Existenz von Universalität: ursprünglich unterschiedliche Wirkungen, die jedoch dieselben Symmetrien aufweisen, laufen unter fortgesetztem Ausintegrieren von Impulsmoden auf dieselbe Form der effektiven Wirkung zu.

Im Folgenden wird die Renormierungsgruppenflussgleichung für die effektive Wirkung hergeleitet, mit der man die Änderung der effektiven Wirkung mit Änderung der Skala betrachten kann. Hat man ihre Lösung, so erlaubt sie das Verhalten der physikalischen Größen und Kopplungen bei unterschiedlichen Skalen zu betrachten. Wir beginnen dazu mit dem erzeugenden Funktional der n -Punkt-Korrelationsfunktionen für eine euklidische Theorie:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi, J]}. \quad (2.2)$$

Dieses ist das quantenfeldtheoretische Analogon zur Zustandssumme der Statistischen Physik. Die Zustandssumme ist das Integral über alle Feldkonfigurationen, die gewichtet sind durch einen exponentiellen Faktor. $S[\phi, J]$ ist dabei die Wirkung in Anwesenheit einer externen Quelle J :

$$S[\phi, J] = S[\phi] + \int d^d x J(x) \phi(x). \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet d die Dimension des euklidischen Raumes.

Wenn man dieses Funktional n mal nach der Quelle J funktional ableitet, erhält man

²Trivial ist ein Fixpunkt beispielsweise, wenn das System nicht wechselwirkt, z.B. ein Spinfeld, bei dem alle Spins eingefroren sind.

die n -Punkt Korrelationsfunktion³:

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle = \int \mathfrak{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-S[\phi, J]} \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{Z[J=0]} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \cdots \left(\frac{\delta}{\delta J(x_n)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (2.5)$$

Das erzeugende Funktional generiert aber auch unverbundene Feynmangraphen, die nicht zur S-Matrix beitragen. Um die unverbunden Graphen zu entfernen, bilden wir den Logarithmus von $Z[J]$ und erhalten auf die Weise das sogenannte Schwinger-Funktional, welches nur verbundene Graphen erzeugt:

$$W[J] = \log Z[J] = \log \int \mathfrak{D}\phi e^{-S[\phi, J]}. \quad (2.6)$$

Die effektive Wirkung ist durch dasjenige Funktional definiert, welches alle 1-PI-Graphen⁴ erzeugt, d.h. solche die durch Auftrennen einer inneren Linien nicht in zwei Graphen zerlegt werden können. Man erhält sie durch Legendre-Transformation von $W[J]$:

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -W[J] + \int d^d x J(y) \phi_{cl}(y). \quad (2.7)$$

Dabei ist ϕ_{cl} das sogenannte klassische Feld, durch das der Vakuumerwartungswert des Feldoperators $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J$ in Anwesenheit einer Externen Quelle J (z.B. externes Magnetfeld im Falle eines Ferromagneten) gegeben ist:

$$\phi_{cl}(x) = \frac{\int \mathfrak{D}\phi \phi(x) e^{-S[\phi, J]}}{\int \mathfrak{D}\phi e^{-S[\phi, J]}} = \frac{\delta W}{\delta J(x)}. \quad (2.8)$$

Wir erhalten die externe Quelle, indem wir die effektive Wirkung Gl. (2.7) nach dem klassischen Feld funktional ableiten:

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x)} = - \int d^d y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{cl}(x)} + \int d^d y \frac{\delta J}{\delta \phi_{cl}(x)} \phi_{cl}(y) + J(x) = J(x). \quad (2.9)$$

Damit kann man ein implizites Funktional für die effektive Wirkung $\Gamma[\phi_{cl}]$ in Form einer funktionalen Integro-Differentialgleichung angeben:

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_{cl}] &= - \log \int \mathfrak{D}\phi e^{-S[\phi] + \int \frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}} (\phi - \phi_{cl})}, \\ &\stackrel{\phi \rightarrow \phi + \phi_{cl}}{=} - \log \int \mathfrak{D}\phi e^{-S[\phi + \phi_{cl}] + \int \frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}} \phi}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

³ T bezeichnet dabei den sogenannten Zeitordnungsoperator. Details siehe z.B. [18].

⁴1-PI ist die Abkürzung für one-particle-irreducible.

Hierbei können wir ϕ als Fluktuationen um das klassische Feld ϕ_{cl} ansehen. Im Allgemeinen sind diese Gleichungen nicht ohne weiteres lösbar. Zusätzlich sehen wir uns mit dem Problem konfrontiert, dass IR-Divergenzen auftreten werden.

Diese implizite Darstellung von $\Gamma[\phi_{cl}]$ kann um ϕ_{cl} entwickelt werden:

$$\Gamma[\phi_{cl}] = S[\phi_{cl}] - \log \int \mathfrak{D}\phi e^{-\int (\frac{\delta S[\phi_{cl}]}{\delta \phi} - \frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}})\phi - \iint \phi \frac{\delta^2 S[\phi_{cl}]}{\delta \phi \delta \phi} \phi + \dots}. \quad (2.11)$$

Es ergibt sich in dieser Entwicklung, die perturbative 1-Loop Näherung.

$$\Gamma[\phi_{cl}] = S[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(\frac{\delta^2 S[\phi_{cl}]}{\delta \phi \delta \phi} \right). \quad (2.12)$$

Was es jetzt anzustreben gilt, ist einen Ausdruck zu finden für die effektive Wirkung, die interpoliert zwischen der klassischen Wirkung S bei der keine Quantenkorrekturen berücksichtigt werden, und der volle effektive Wirkung Γ , bei der alle Quantenfluktuationen berücksichtigt werden. Wir suchen also eine Wirkung, die zusätzlich zu dem UV-Cutoff Λ , einen IR-Cutoff k trägt. Dadurch vermeidet man die Existenz von IR-Divergenzen. Diese interpolierende Wirkung erhalten wir dadurch, dass wir zu unserer Wirkung einen k -abhängigen, also skalenabhängigen Wirkungsterm einfügen, der zugleich die IR-Divergenzen beseitigt. Die effektive Wirkung ist dann definiert durch das erzeugende Funktional aller 1-PI-Graphen mit einem IR-Cutoff. Wir erweitern daher die klassische Wirkung $S[\phi]$ um einen skalenabhängigen Term:

$$S_k[\phi] = S[\phi] + \Delta S_k[\phi]. \quad (2.13)$$

Dabei ist $\Delta S_k[\phi]$ wie folgt definiert:

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(-p) R_k(p) \phi(p). \quad (2.14)$$

Damit erhalten wir:

$$W_k[J] = \log Z_k[J] = \log \int \mathfrak{D}\phi e^{-S_k[\phi, J]}. \quad (2.15)$$

Für $\Gamma_k[\phi]$ verwenden wir eine modifizierte Legendre-Transformation:

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[J(\phi)] + \int d^d x J(x) \phi(x) - \Delta S_k[\phi]. \quad (2.16)$$

Aus der Form von $\Delta S_k[\phi] \propto \phi^2$ sieht man, dass der Regulatorterm $R_k(p)$ wie eine impulsabhängige Masse wirkt. Dabei ist die Wahl von $R_k(p)$ nicht beliebig, sondern muss folgende Eigenschaften erfüllen:

- Für die Implementierung einer IR-Regularisation muss gelten:

$$\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} R_k(p) > 0. \quad (2.17)$$

- Wenn man beabsichtigt sämtliche Fluktuationen vom UV-Cutoff Λ an auszuintegrieren, muss bei verschwindenden IR-Cutoff für den Regulatorterm folgendes gelten:

$$\lim_{k \rightarrow 0} R_k(p) = 0. \quad (2.18)$$

- Betrachtet man $k \rightarrow \Lambda$, so muss sich als Resultat die klassische Wirkung ergeben; das ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} R_k(p) = \infty \quad (2.19)$$

gilt.

Diese drei Bedingungen werden erfüllt durch einen Regulator der Form:

$$R_k(p^2) \propto p^2 r \left(\frac{p^2}{k^2} \right). \quad (2.20)$$

Als letztes muss die Impuls-Integration in der Flussgleichung konvergieren für $p^2 \gg k^2$ und für $p^2 \ll k^2$, d.h. nur eine kleine Impulsschale $p^2 \approx k^2$ soll effektiv zur Integration beitragen. Die Erfüllung dieser Forderung folgt bereits aus Gl. (2.20): Durch die gewählte Form des Regulators erhält dessen Ableitung $\partial_t R_k$ eine peakartige Struktur⁵.

Als Beispiel für $R_k(p)$ betrachten wir:

$$R_k(p) \propto \frac{p^2}{e^{\frac{p^2}{k^2}} - 1}. \quad (2.21)$$

R_k verschwindet für $k \rightarrow 0$ und divergiert für $k \rightarrow \infty$, bei fixiertem p . Für Fluktuationen mit kleinem Impuls $p^2 \ll k^2$ verhält sich R_k wie $\propto k^2$. Da $\Delta S_k[\phi]$ quadratisch in den Feldern ist, bedeutet, dass sämtliche Fourier-Moden, deren Impulse kleiner als k sind, eine effektive Masse $\propto k$ erhalten. Diese effektive Masse wirkt als IR-Cutoff für Impulsmoden für die $p^2 \leq k^2$ gilt. Impulsmoden dagegen für die $p^2 \geq k^2$ gilt, werden nicht berührt. Damit unterdrückt $\Delta S_k[\phi]$ die Propagation von IR-Moden.

Wir leiten im Folgenden die Renormierungsgruppenflussgleichung für die effektive Wirkung Γ_k ab. Die Renormierungsgruppenflussgleichung drückt Skalenabhängigkeit von Γ_k in Termen des vollen Propagators ($\equiv \Gamma_k^{(2)}$) aus. Wir schauen uns dazu an, wie sich das

⁵Siehe die Wetterichgleichung Gl. (2.29)

skalenabhängige erzeugende Funktional der verbundenen Greens-Funktionen (Gl. (2.15)) unter Variation der Skala k ändert:

$$\begin{aligned}
 k \frac{\partial}{\partial k} W_k &= e^{-W_k} k \frac{\partial}{\partial k} e^{W_k} \\
 &= e^{-W_k} \int \mathfrak{D}\phi (-\partial_t \Delta S_k[\phi]) e^{-S_k[\phi, J]} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (\partial_t R_k(p)) \frac{1}{Z_k} \int \mathfrak{D}\phi \phi(-p) \phi(p) e^{-S_k[\phi, J]}. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Dabei ist $\partial_t = k \frac{\partial}{\partial k}$ und

$$\begin{aligned}
 G_k(p) &= \frac{1}{Z_k} \int \mathfrak{D}\phi \phi(-p) \phi(p) e^{-S_k[\phi, J]} \\
 &= \langle \phi(-p) \phi(p) \rangle, \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

die 2-Punkt Korrelations-Funktion. Wir fügen in Gl. (2.22) eine aktive Null der folgenden Form ein:

$$0 = -\langle \phi(-p) \rangle \langle \phi(p) \rangle + \langle \phi(-p) \rangle \langle \phi(p) \rangle. \quad (2.24)$$

Damit ergibt sich für $\partial_t W_k$:

$$\partial_t W_k = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \{ (\partial_t R_k(p)) [\langle \phi(-p) \phi(p) \rangle - \langle \phi(-p) \rangle \langle \phi(p) \rangle] + (\partial_t R_k(p)) \langle \phi(-p) \rangle \langle \phi(p) \rangle \}. \quad (2.25)$$

Dabei ist der Term in den eckigen Klammern die Greens-Funktion der zusammenhängenden Feynman-Graphen $G_{c,k}(p)$. Mit $\phi(p) = \langle \phi(p) \rangle$ und der Definition von ΔS_k erhalten wir:

$$\partial_t W_k = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [(\partial_t R_k(p)) G_{c,k}(p)] - \partial_t \Delta S_k[\phi]. \quad (2.26)$$

Für den Fluss der effektiven Wirkung $\Gamma_k[\phi]$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma_k[\phi] &= - \left[\partial_t W_k[J(\phi)] + \int d^d x \frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)} (\partial_t J(x)) \right] \\
 &\quad + \int d^d x (\partial_t J(x)) \phi(x) - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [(\partial_t R_k(p)) G_{c,k}(p)], \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

wobei $\frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)} = \phi(x)$.

Für den letzten Schritt schreiben wir $G_{c,k}(p)$ als funktionale Ableitung von der skalenabhängigen effektiven Wirkung Γ_k :

$$G_{c,k}(p) = \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} = \frac{\delta \phi}{\delta J} = \left(\frac{\delta J}{\delta \phi} \right)^{-1} = \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1}. \quad (2.28)$$

Es ergibt sich die Renormierungsgruppenflussgleichung bzw. die sogenannte Wetterich-Gleichung [12]:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \partial_t R_k(p) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi(-p) \delta \phi(p)} + R_k(p) \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

Die Wetterichgleichung wurde hier für ein reelles skalares Feld hergeleitet. Hat man es auch mit fermionischen Feldern zu tun, so ist die Spur auch über alle inneren Freiheitsgrade zu bilden⁶:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \partial_t R_k(p) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi(-p) \delta \phi(p)} + R_k(p) \right)^{-1} \right\}. \quad (2.30)$$

Hier steht $\phi(p)$ für bosonische und fermionische Felder. Der Ausdruck in Gl. (2.29) kann auch geschrieben werden als:

$$\Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right) + \text{const} - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_t \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi}}{\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k} \right). \quad (2.31)$$

Betrachtet man $k \rightarrow \Lambda$ und setzt man $\text{const} = S_\Lambda[\phi]$, so erhält man wieder die obige Entwicklung (Gl. (2.12)).

$$\Gamma[\phi] = S_\Lambda[\phi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi \delta \phi}. \quad (2.32)$$

Die Störungstheorie ist also als Spezialfall in der Flussgleichung enthalten.

Mit der Renormierungsgruppenflussgleichung hat man einen nicht-perturbativen Zugang zur Quantenfeldtheorie. Das ist insofern erfreulich, da die restriktive Voraussetzung der Störungsrechnung, dass die Kopplung(en) klein sein müssen, hier nicht notwendig ist. Daher ist das Anwendungsgebiet der Flussgleichung umfassender als das von perturbativen Zugängen zur Quantenfeldtheorie. Es lassen sich damit auch Phasenübergänge beschreiben, in denen es auf Grund langreichweitiger Korrelationslängen zu starken Wechselwirkungen kommt.

⁶Die Summation über alle inneren Freiheitsgrade wird ausgedrückt durch STr - Supertrace. Man summiert z.B. noch über alle Dirac-Indizes, Color-Indizes und Flavor-Indizes, siehe Kap. 7.

3 Spontane Symmetriebrechung

Gegeben sei ein Lagrangian mit bestimmten Symmetrieeigenschaften. Unter einer spontanen Symmetriebrechung versteht man das Phänomen, dass der Grundzustand des betrachteten Systems, diese bestimmte Symmetrie eben nicht mehr aufweist. Beispielsweise kann der Lagrangian des Systems eine Rotationssymmetrie $O(N)$ aufweisen, welche im Grundzustand spontan gebrochen ist. Die Symmetriebrechung wird deswegen als spontan bezeichnet, weil diese ohne äußeren Einfluss geschieht ¹. Von einer expliziten Symmetriebrechung spricht man, wenn die Symmetrie des Lagrangian durch einen Symmetriebrechungsterm von vornherein aufgehoben ist; beispielsweise kann durch die Einführung eines linearen Terms $c \cdot \phi$ in einen \mathcal{Z}_2 -symmetrischen Lagrangian $\propto \mathcal{L}[(\phi)^2]$ die Spiegelsymmetrie $\phi \rightarrow -\phi$ explizit gebrochen werden. Um dieses Phänomen näher zu veranschaulichen, betrachten wir zwei Modelle: das Lineare Sigma Modell und das Nambu-Jona-Lasinio-Modell.

3.1 Lineares Sigma-Modell

Das Lineare Sigma-Modell ist durch den folgenden Lagrangian \mathcal{L} definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(\vec{\phi}))^2 - \frac{1}{2}m^2(\vec{\phi})^2 - \frac{1}{4!}\lambda[(\vec{\phi})^2]^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(\vec{\phi}))^2 - V(\vec{\phi}^2).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dabei sind $\vec{\phi}$ N reale Skalarfelder und λ definiert die 4-Punkt-Kopplung, wobei $\lambda > 0$. Dieser Lagrangian ist invariant unter der kontinuierlichen Rotation $\phi^i \rightarrow R_j^i \phi^j$, wobei R_j^i eine orthogonale $N \times N$ -Matrix ist. Man spricht hier also von einer kontinuierlichen Symmetrie. Für die folgende Diskussion benötigen wir den Vakuumserwartungswert dieser Theorie, d.h. das Minimum des Lagrangian. Dazu führen wir eine Variation der Wirkung nach dem Feld aus:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta \vec{\phi}} &= \frac{\delta}{\delta \vec{\phi}} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2(\vec{\phi})^2 - \frac{1}{4!}\lambda [(\vec{\phi})^2]^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2}\square \vec{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \vec{\phi}} \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

¹Die Spontanität ist dabei keine Willkür, sondern hat ihre Ursache in Quantenfluktuationen. Ein äußerer Einfluss, wäre z.B., im Falle eines Ferromagneten, ein äußeres magnetisches Feld.

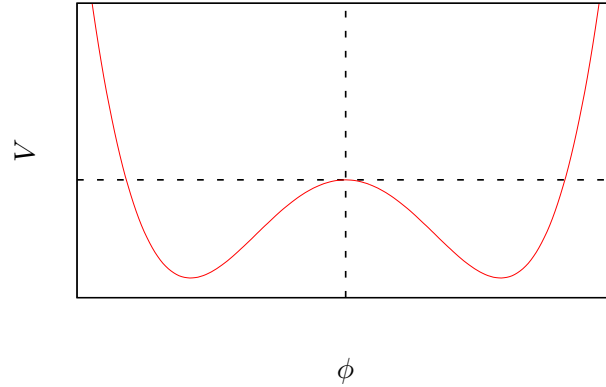


Abbildung 3.1: Skizze des Potentials von Gl. (3.1) für $N = 1$ mit Masseterm $m^2 = -\mu^2$. Die gestrichelte Linie markiert den Nulldurchgang.

Wenn wir verlangen, dass der Vakuumerwartungswert unter Lorentz-Transformationen und Translationen invariant sein soll, so folgt daraus, dass der Wert von ϕ , welcher V minimiert, konstant sein muss. Es muss also gelten: $\square \vec{\phi} = 0$. Der Vakuumerwartungswert ist dann bestimmt durch das (globale) Minimum des Potentials. Hat das Potential die in Gl. (3.1) angegebene Form, so verschwindet der Vakuumerwartungswert für $m^2 > 0$. Entwickelt man das Potential um dieses verschwindende Minimum $\vec{\phi}_0 = (0, \dots, 0)$ herum, so stellt man fest, dass die $O(N)$ -Symmetrie erhalten bleibt. Diesen Fall bezeichnet man als symmetrisches Regime.

Für den Fall, dass $0 > m^2 := -\mu^2$, mit $\mu \in \mathbb{R}$:

$$V(\vec{\phi}) = -\frac{1}{2}\mu^2(\vec{\phi})^2 + \frac{\lambda}{4!}[(\vec{\phi})^2]^2, \quad (3.3)$$

ergibt sich für das Minimum des so abgeänderten Potentials der Betrag des Vektors: $(\vec{\phi}_0)^2 = \frac{6\mu^2}{\lambda}$, wobei wir den Vektor in Richtung der ϕ_N -Achse legen: $\vec{\phi}_0 = (0, 0, \dots, \sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}})$. Damit lassen sich die Felder $\vec{\phi}$ schreiben als:

$$\vec{\phi}(x) = (\pi^k(x), \sigma(x) + \sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}), \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (3.4)$$

Wir entwickeln Gl. (3.3) um das Minimum und erhalten unter Vernachlässigung kon-

stanter Terme als Ergebnis für den Lagrangian:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma(\pi^k)^2 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4 \\ &\quad - \frac{\lambda}{12}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4!}[(\pi^k)^2]^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}2\mu^2\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4!}[(\sigma^2 + \pi^2)]^2. \quad (3.5)\end{aligned}$$

Zuvor trugen alle unsere Felder gleichermaßen die Masse $-\mu^2$. Die Reformulierung dieser Felder um das Minimum herum bricht die $O(N)$ -Symmetrie und führt zur Erzeugung von $N-1$ masselosen Feldern π^k und einem massiven Sigmafeld σ . Dabei sind die masselosen Felder die Oszillationen in tangentialer Richtung, d.h. entlang der Potentialmulde und die σ -Mode die Oszillationen in radialer Richtung. In tangentialer Richtung weist das System eine $O(N-1)$ -Symmetrie auf, d.h. dass alle Zustände, die entlang der Mulde existieren sind entartet. Die Symmetrie ist spontan gebrochen, weil das System sich in genau einem der Grundzustände befindet und deshalb ist das System unter Rotationen nicht mehr invariant. Die masselosen Felder bezeichnet man als Goldstone-Bosonen. Die Tatsache, dass die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie die Existenz masseloser Bosonen zu Folge hat, nennt man Goldstone-Theorem. Hat man eine Theorie mit N Feldern, so erhält man nach erfolgtem spontanem Symmetriebruch $N-1$ Goldstone-Bosonen².

Ein physikalisches Beispiel für Goldstone-Moden sind transversale Spinwellen beim $O(N)$ -Spin-Modell [29]. Es sind langreichweitige Anregungsmoden mit unendlicher Wellenlänge im Grenzfall verschwindenden äußeren Feldes. Diese langreichweitigen Moden stellen eine Korrelation zwischen allen Spins her.

3.2 Nambu-Jona-Lasinio-Modell

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell (NJL) ist durch folgenden Lagrangian definiert:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_{a,\alpha} \mathbb{1}_{a,b}^{\text{color}} i \not{\partial} \psi_{b,\beta} \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} + \frac{\lambda}{2} [(\bar{\psi}_{a,\alpha} \mathbb{1}_{a,b}^{\text{color}} \psi_{b,\beta} \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}})^2 + (\bar{\psi}_{a,\alpha} \mathbb{1}_{a,b}^{\text{color}} i \vec{\tau} \gamma_5 \psi_{b,\beta} \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}})^2]. \quad (3.6)$$

Dabei sind $\vec{\tau} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die Pauli-Matrizen, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ und die Gamma-Matrizen γ_μ haben die Standard-Form:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)\end{aligned}$$

²Ein Beweis dieses Theorems findet sich in [36].

Im Folgendem geben wir die Color- und Flavor-Indizes nicht explizit an.

Der NJL-Lagrangian ist unter zweierlei Transformationen invariant:

- Λ_V :

$$\psi \rightarrow e^{-i\vec{\tau}\vec{\Theta}/2}\psi. \quad (3.8)$$

Es genügt dabei die infinitesimale Transformation

$$\psi \rightarrow (1 - i\vec{\tau}\vec{\Theta}/2)\psi \quad (3.9)$$

zu betrachten. Jede andere erreicht man durch Hintereinanderausführung von vielen infinitesimalen Transformationen. Analog für die Transformation von $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{+i\vec{\tau}\vec{\Theta}/2}\bar{\psi} \cong (1 + i\vec{\tau}\vec{\Theta}/2)\bar{\psi}. \quad (3.10)$$

Diese Vektor-Transformation bewirkt eine Drehung im Isospinraum um den Winkel $\vec{\Theta}$. Der Begriff des Isospins reflektiert das identische Verhalten von Protonen und Neutronen unter dem Einfluss starker Wechselwirkungen (quasi gleiche Massen, Starke Wechselwirkung unabhängig von elektrischer Ladung).

- Λ_A :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\Theta}/2}\psi \cong (1 - i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\Theta}/2)\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\Theta}/2}\bar{\psi} \cong (1 - i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\Theta}/2)\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Λ_A nennt man chirale Symmetrietransformation oder auch axiale Vektortransformation. Von einer chiralen Symmetrie spricht man, wenn die Symmetrietransformation unterschiedlich auf Anteile verschiedener Chiralität wirkt. Das bedeutet das die Anteile links- und rechtshändiger Chiralität im Lagrangian³ voneinander separiert sind und als Einzelne betrachtet werden können. Vermischt werden diese Anteile jedoch durch Massenterme in der Lagrangedichte.

Gl. (3.6) ist invariant unter beiden Transformationen; die axiale Symmetrie ist jedoch gebrochen, sobald wir einen expliziten Quarkmassenterm hinzufügen. Da die up- und down-Quarks eine Masse von etwa $5 - 10 \text{ MeV} \ll \Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV}$ aufweisen [37, 17], kann man annehmen, dass Λ_A eine approximative Symmetrie darstellt. Mit verschwindender Quarkmasse stellt sich chirale Symmetrie ein, die dann allerdings trotzdem spontan gebrochen werden kann. Demnach prognostiziert das Goldstone-Theorem die Existenz von drei masseloser Goldstonebosonen. Die Goldstone-Bosonen in der QCD nennt man

³Bekanntlich kann ein Dirac-Spinor in Anteile linker und rechter Chiralität zerlegt werden: $\psi = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi + \frac{1+\gamma_5}{2}\psi \equiv \psi_L + \psi_R$.

Pionen. Bosonische Anteile enthält \mathcal{L}_{NJL} offensichtlich nicht; woraus folgt, dass diese in Form von gebundenen Fermionenzustände darstellbar sein müssen. Die bosonischen Anteile kann man einführen, in dem man den Lagrangian des NJL-Modells \mathcal{L}_{NJL} wie folgt umformuliert. Zu der Funktional-Integral Darstellung dieses Modells:

$$Z[\bar{\psi}, \psi] = \int \mathfrak{D}\bar{\psi} \int \mathfrak{D}\psi \cdot e^{i \int d^4x \mathcal{L}}, \quad (3.12)$$

fügen wir eine aktive Eins hinzu:

$$\mathcal{N} \int \mathfrak{D}\sigma \int \mathfrak{D}\vec{\pi} \cdot e^{-i \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \right\}} = 1. \quad (3.13)$$

σ und $\vec{\pi}$ sind dabei bosonische Hilfsfelder und \mathcal{N} eine Normierungskonstante. Wenn wir die bosonischen Felder σ und $\vec{\pi}$ wie folgt verschieben:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma + \frac{h}{m^2} \bar{\psi} \psi, \\ \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\pi} + \frac{h}{m^2} (\bar{\psi} i \vec{\tau} \gamma_5 \psi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

und mit der Definition der 4-Fermionen-Kopplung λ ,

$$\lambda = \frac{h^2}{m^2}, \quad (3.15)$$

erhalten wir den bosonisierten Lagrangian des NJL-Modells:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - h \bar{\psi} (\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5) \psi. \quad (3.16)$$

Wie wir sehen, haben wir im bosonisierten Lagrangian statt einer 4-Fermionen-Wechselwirkung, eine Yukawa-Wechselwirkung zwischen den massiven Bosonenfeldern und den Fermionen. Die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Bosonen und den Fermionen wird vermittelt durch die Yukawa-Kopplung h . Wir verallgemeinern das bosonisierte NJL-Modell, indem wir kinetische Terme für die Bosonen und bosonische Selbst-Wechselwirkungsterme zulassen ⁴. Das volle Quark-Meson-Modell lautet dann:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4!} [(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)]^2 - h \bar{\psi} (\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5) \psi. \quad (3.17)$$

⁴Zunächst nur einen Wechselwirkungsterm $\propto \phi^4$, aber auch höhere Ordnungen sind möglich. Diese müssen nicht schon auf der UV-Skala Λ existieren, sondern sie werden durch Quantenfluktuationen erzeugt; insofern ist diese Verallgemeinerung berechtigt.

Dieser Lagrangian ist symmetrisch unter den Transformationen Λ_V und Λ_A . Um das zu zeigen, drücken wir die Pionen und das Sigma-Feld durch Kombinationen von Fermionfeldern aus, die dieselben Quantenzahlen wie die Mesonen tragen. Kombinationen fermionischer Felder kann man genau dann als Bosonen auffassen, wenn diese Kombinationen kommutieren, sich also eben wie bosonische Felder verhalten; daher kann man die Mesonen als Fermionenzustände auffassen: $\vec{\pi} \equiv i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi$ und $\sigma \equiv \bar{\psi}\psi$. Das σ -Meson bleibt unter Λ_V mit sich selbst identisch; $\vec{\pi}$ transformiert sich wie folgt:

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\Theta} \times \vec{\pi}. \quad (3.18)$$

Λ_V dreht also $\vec{\pi}$ im Isospinraum um den Winkel $\vec{\Theta}$.

Dagegen werden die Mesonen unter der axialen Vektortransformation Λ_A wie folgt transformiert:

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\pi} + \vec{\Theta}\sigma, \\ \sigma &\rightarrow \sigma - \vec{\Theta}\vec{\pi}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Pionen und das σ -Meson werden demnach um den Winkel $\vec{\Theta}$ ineinander rotiert.

Es ist anzumerken, dass der Lagrangian nur dann unter Λ_V und Λ_A invariant ist, wenn die transformierten Felder mit den nicht transformierten identisch sind. Im Falle von Λ_V ist das für beide Felder nur dann der Fall, wenn allein gerade Potenzen von $\vec{\pi}$ auftreten, beispielsweise $\vec{\pi}^2$. Die Potenz von σ spielt an dieser Stelle keine Rolle. Unter Λ_A haben $\vec{\pi}^2$ und σ^2 folgendes Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned} \vec{\pi}^2 &\rightarrow \vec{\pi}^2 + 2\sigma\Theta_i\pi_i, \\ \sigma^2 &\rightarrow \sigma^2 - 2\sigma\Theta_i\pi_i. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mit sich selber identisch bleiben die Felder nur dann, wenn diese in der Form $\propto (\vec{\pi}^2 + \sigma^2)^n$ auftreten, wobei n eine gerade Potenz ist. Der Yukawa-Kopplungsterm in Gl. (3.17) transformiert sich wie $\vec{\pi}^2 + \sigma^2$. Daher bleibt der Lagrangian (3.17) unter Isospin-Drehungen und chiralen Transformationen invariant.

Bestimmen wir das Minimum des Potentials für $m^2 = -\mu^2$ analog wie beim $O(N)$ -Modell: $\phi_0 = \sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}} = \langle\sigma\rangle$ und $\langle\pi\rangle = 0$. Wir entwickeln Gl. (3.17) um dieses Minimum. Mit der neuen Feldvariablen: $\sigma \rightarrow \sigma - \langle\sigma\rangle$ ergibt sich für Gl. (3.17) unter Vernachlässigung konstanter Terme folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - ig\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5 - g(\sigma + \langle\sigma\rangle))\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}2\mu^2\sigma^2 - \langle\sigma\rangle\sigma(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4!}[(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)]^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Wir sehen, dass die Quarks jetzt eine Masse tragen, die proportional zum Vakuumserwartungswert des Bosonenfeldes ist. Damit ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen.

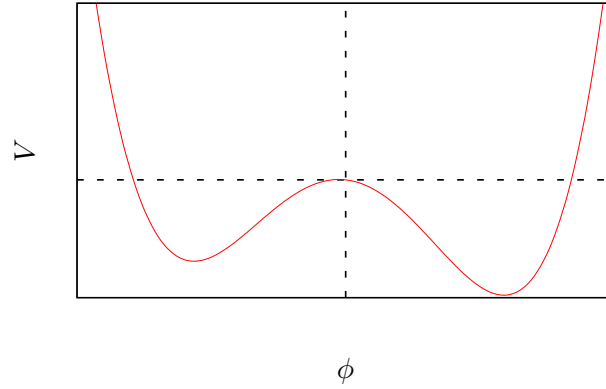


Abbildung 3.2: Skizze des Potentials von Gl.(3.1) für $N = 1$ mit Masseterm $m^2 = -\mu^2$ und expliziten Symmetriebrechungsfaktor $c\sigma$, wobei $c < 0$ ist. Die gestrichelte Linie markiert den Nulldurchgang.

Die Masse des σ -Bosons ist gleich $\sqrt{2}\mu$, die Masse der drei Pionen $\vec{\pi}$ verschwindet. Eine explizite Symmetriebrechung kann man erzeugen durch Hinzufügung einer expliziten Quarkmasse, der so genannten Current-Quarkmasse m_c d.h. einen Term $\bar{\psi}m_c\psi$ oder indem zum Potential ein linearer Term $\propto c\sigma$ mit $c < 0$ hinzugefügt wird. Da $\sigma \propto \bar{\psi}\psi$ ist, sind beide Zugänge äquivalent. Die Gesamtquarkmasse die sich ergibt aus spontanen und expliziten Symmetriebrechung, nennt man Konstituenten-Quarkmasse.

Um explizite Symmetriebrechung in unser Modell zu implementieren, verwenden wir die zweite Methode und erhalten ein Potential (Siehe Abb. 2):

$$V(\vec{\pi}, \sigma) = \frac{1}{2}\mu^2(\vec{\pi}^2 + \sigma^2) - \frac{1}{4!}[(\vec{\pi}^2 + \sigma^2)]^2 + c\sigma. \quad (3.22)$$

Zur Bestimmung des Minimums von Gl. (3.22) ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$[\mu^2 - \frac{\lambda}{3!}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)]\vec{\pi} = 0, \quad (3.23)$$

$$[\mu^2 - \frac{\lambda}{3!}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)]\sigma + c = 0. \quad (3.24)$$

Weil aber weder c noch σ gleich Null sein dürfen, folgt daraus, dass für die Pionenfelder $\vec{\pi} = 0$ gelten muss. Daraus ergibt sich die Minimierungsbedingung:

$$(\mu^2 - \frac{\lambda}{3!}\sigma_0^2)\sigma_0 + c = 0. \quad (3.25)$$

In der Natur besitzen die Pionen eine endliche Masse, die aber klein ist im Vergleich zu den Nukleonen; ebenso sind die Quarkmassen viel kleiner als die relevante Skala der QCD

$\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV}$. Daher ist die chirale Symmetrie in der Natur nur leicht gebrochen und man kann annehmen, dass die explizite Symmetriebrechung c klein ist, und dass σ_0 nur eine schwache Abhängigkeit von c aufweist. Somit sollte $\sigma_0 \equiv \sigma_0(c)$ in Potenzen von c entwickelbar sein. Es ist nicht notwendig mit der vollen Lösung der kubischen Gleichung (3.25) zu rechnen, sondern wir entwickeln σ_0 in eine Potenzreihe $\sum a_i c_i$ bis zur Ordnung c . Durch Koeffizientenvergleich findet man für $\sigma_0(c)$:

$$\sigma_0(c) = \sqrt{\frac{6}{\lambda}} \mu + \frac{c}{2\mu^2}. \quad (3.26)$$

Für $c = 0$ erhalten wir wieder das Minimum ohne explizite Symmetriebrechung. Wir entwickeln den Lagrangian um das Minimum $\sigma_0(c)$ herum, definieren eine neue Feldvariable: $\sigma - \sigma_0(c) \rightarrow \sigma$ und erhalten unter Vernachlässigung konstanter Terme als Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi})^2 - g \bar{\psi} i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5 \psi - g \bar{\psi} \left(\sigma + \langle \sigma \rangle + \frac{c}{2\mu^2} \right) \psi \\ & - \frac{1}{2} \sigma^2 (2\mu^2 + 3\mu_c^2) - \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 \mu_c^2 - \langle \sigma \rangle \sigma (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4!} [(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)]^2 \\ & - \frac{\lambda c}{12\mu^2} \sigma (\sigma^2 + \vec{\pi}^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Wie man in Gl. (3.27) erkennt, bekommen die Pionen durch die explizite Symmetriebrechung eine Masse μ_c^2 . Der genaue Ausdruck für μ_c^2 lautet dabei:

$$\mu_c^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda c^2}{8\mu^2} + \frac{c}{\mu} \sqrt{\frac{3}{2}\lambda} \right). \quad (3.28)$$

Die Masse der Fermionen besteht aus zwei Anteilen: einmal aus $\langle \sigma \rangle$, der Vakuumserwartungswert des σ -Feldes, und einen zusätzlichen Term, der rein additiv hinzukommt, wenn die chirale Symmetrie des Lagrangian explizit gebrochen wird.

Wir werden sehen, dass sich das symmetrische und das gebrochen-symmetrische Regime sich nicht äußerlich gegenüberstehen, sondern durch Skala und bzw. oder Temperaturänderung in einander überführt werden können. Wir zeigen dies analytisch für das NJL-Modell in Kap. 4.3.

4 Thermische Feldtheorie

4.1 Thermische Feldtheorie für Bosonen

Wie in Kap. 2 dargestellt, ist das erzeugende Funktional der n -Punkt-Korrelationsfunktionen wie folgt definiert:

$$Z[J] = \int \mathfrak{D}\phi e^{-S[\phi, J]}. \quad (4.1)$$

Der Propagator ist definiert als die zeitgeordnete 2-Punkt-Korrelationsfunktion, d.h. die zweite funktionale Ableitung von $Z[J]$ nach der äußeren Quelle J , ausgewertet bei $J = 0$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle &= \int \mathfrak{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{-S[\phi, J]} \\ &= \frac{1}{Z[J=0]} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aus der Quantenstatistik ist der Ausdruck für die Zustandssumme bekannt:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle. \quad (4.3)$$

Der funktionale Ausdruck für die Zeitevolution zweier Felder lautet:

$$\langle \phi_b(x) | e^{-it\hat{H}} | \phi_a(x) \rangle = \int \mathfrak{D}\phi e^{iS[\phi]} = \int \mathfrak{D}\phi e^{i \int_0^t d^4x \mathcal{L}[\phi]}. \quad (4.4)$$

Offensichtlich ist die quantenstatistische Zustandssumme (4.3) strukturell verwandt mit dem generierenden Funktional (4.1). Die Frage ist allerdings, ob es nicht nur eine bloße Analogie darstellt oder ob eine Wesensidentität zwischen beiden herstellbar ist.

Der Faktor $e^{-\beta \hat{H}}$ kann als Zeitenwicklungsoperator $T(t) = e^{-it\hat{H}}$ mit dem Argument $t = -i\beta$ aufgefasst werden. Das bedeutet man implementiert die Temperatur in eine Quantenfeldtheorie, indem man diese in euklidische Raumzeit überführt und die imaginären Zeit auf die Intervalllänge $[0, \beta]$ beschränkt. Das erzeugende Funktional der thermischen Korrelationsfunktionen hat daher die folgende Form:

$$Z[\beta, J] = \int_{\phi(x, \beta) = \phi(x, 0)} \mathfrak{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \{ \mathcal{L}(\phi(\tau, x)) - J(\tau, x) \phi(\tau, x) \}}. \quad (4.5)$$

Die Randbedingung des Pfadintegrals $\phi(x, \beta) = \phi(x, 0)$ folgt aus Gl. (4.3). Der thermische Propagator hat also folgende Form:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle_\beta &= \int \mathfrak{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{-S[\beta, \phi, J]} \\ &= \frac{1}{Z[\beta, J=0]} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[\beta, J] \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Im Operatorformalismus können wir die Periodizität der bosonischen Felder in euklidischer Zeitrichtung wie folgt bestimmen. Dazu definieren wir den thermischen Erwartungswert eines Operators \hat{O} :

$$\langle \hat{O} \rangle_\beta = \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(\hat{O} e^{-\beta \hat{H}} \right). \quad (4.7)$$

Mit $\hat{O} = T \{ \phi(x_1, 0) \phi(x_2, -i\tau) \}$, dem zeitgeordneten Produkt zweier Felder ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle T \{ \phi(x_1, 0) \phi(x_2, -i\tau) \} \rangle &= \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} T \{ \phi(x, 0) \phi(x, -i\tau) \} \right) \\ &\stackrel{\tau \geq 0}{=} \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \phi(x, -i\tau) \phi(x, 0) \right) \\ &\stackrel{\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)}{=} \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(\phi(x, 0) e^{-\beta \hat{H}} \phi(x, -i\tau) \right) \\ &= \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} e^{+\beta \hat{H}} \phi(x, 0) e^{-\beta \hat{H}} \phi(x, -i\tau) \right) \\ &= \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \phi(x, -i\beta) \phi(x, -i\tau) \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dabei ist $\phi(x, -i\tau) = e^{+\beta \hat{H}} \phi(x, 0) e^{-\beta \hat{H}}$ die Zeitevolution eines Feldes $\phi(x, t)$ für ein komplexes Zeitargument $t = -i\beta$. Es gilt also:

$$T \{ \phi(x_1, 0) \phi(x_2, -i\tau) \} = T \{ \phi(x_1, -i\beta) \phi(x_2, -i\tau) \}. \quad (4.9)$$

Die thermischen Propagatoren und damit die Felder ϕ sind also periodisch in imaginärer Zeit:

$$\phi(x, \beta) = \phi(x, 0). \quad (4.10)$$

Die Felder lassen sich wie folgt entwickeln:

$$\phi(x, \tau) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_p \left(e^{i(px + \omega_n \tau)} \phi_n(p) \right). \quad (4.11)$$

Aus der Periodizitätsbedingung der Felder folgt:

$$\omega_n = 2\pi nT. \quad (4.12)$$

Wertet man die Zustandssumme Gl.(4.1) mit der Randbedingung (4.12) aus, so kann man aus der damit sich ergebenden Zustandssumme thermodynamische Größen ableiten. Thermodynamische Größen wie Druck P , Entropie S , Teilchenanzahl N_i , Energiedichte ϵ , Wärmekapazität C_V und die Schallgeschwindigkeit v :

$$\begin{aligned} P &= T \frac{\partial \log Z}{\partial V}, \\ s &= \frac{\partial(T \log Z)}{\partial T} = \frac{4P}{T} + T^4 \frac{d}{dT} \left(\frac{P}{T^4} \right), \\ N_i &= T \frac{\partial \log Z}{\partial \mu_i}, \\ \epsilon &= T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{P}{T} \right) = 3P + T^5 \frac{d}{dT} \left(\frac{P}{T^4} \right), \\ C_V &= T \frac{\partial s}{\partial T}, \\ v^2 &= \frac{dP}{d\epsilon} = \frac{dP}{dT} / \frac{d\epsilon}{dT}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Wir illustrieren dies am Beispiel einer wechselwirkungsfreien skalaren Theorie, die durch folgende Wirkung definiert ist:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi(x, \tau) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x, \tau). \quad (4.14)$$

Diese Wirkung transformieren wir in den Impulsraum durch obige Entwicklung (4.11) des Feldes $\phi(x, \tau)$. Mit der Realitätsbedingung¹: $\phi_{-n}(-p) = \phi_n^\dagger(p)$ und mit $\omega^2 = p^2 + m^2$ erhalten wir für die Wirkung:

$$S = \frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_p \left((\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(p) \phi_n^\dagger(p) \right). \quad (4.15)$$

Für die Zustandssumme ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \prod_n \prod_p \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_n(p) e^{\left[-\frac{1}{2} \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(p) \phi_n^\dagger(p) \right]} \\ &= \mathcal{N} \prod_n \prod_p \sqrt{\frac{2\pi}{[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)]}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

¹Die Realitätsbedingung folgt aus der Forderung, dass $\phi(x, \tau)$ reelle Felder darstellen.

Für den Logarithmus derselben erhalten wir:

$$\log Z = \log \mathcal{N}' - \frac{1}{2} \sum_n \sum_p \log [\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)]. \quad (4.17)$$

Die Normierungskonstante kann weggelassen werden, da sie von keiner thermodynamischen Variablen abhängt. Die Summe über n , die sogenannte Matsubara-Summe, divergiert. Um dieses Problem zu lösen leiten wir $\log Z$ nach ω^2 ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega^2} (\log Z) &= -\frac{\partial}{\partial \omega^2} \left(\frac{1}{2} \sum_n \sum_p \log [\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)] \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_n \sum_p \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der Doppelsummenausdruck hat Polstellen bei $i\omega_n = \omega$. Wir schreiben den Ausdruck daher als ein Konturintegral über die komplexe Funktion $f(z)$, welche so zu wählen ist, dass diese dieselben Pole aufweist wie obiger Ausdruck. Dieses Konturintegral ist dann auszuwerten über den Residuensatz².

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_n \sum_p \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2} &= \oint_C dz f(z) \\ &= -\frac{\beta}{2} \sum_p \left(\frac{\coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right)}{2\omega} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

$\log Z$ erhält man durch nun Integration über ω^2 :

$$\begin{aligned} \log Z &= -\frac{1}{2} \sum_p 2 \log \sinh\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_p \left(\omega\beta + 2 \log(1 - e^{-\omega\beta}) \right) \\ &= -V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2} \omega\beta + \log(1 - e^{-\omega\beta}) \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dabei stellt der erste Term die Nullpunktsenergie dar. Für den einfachsten Fall setzen wir $m = 0$ und vernachlässigen die Nullpunktsenergie, da diese nicht zu den thermody-

²Für Details siehe [21] und [25].

namischen Oversablen beiträgt. Wir erhalten wir für den Druck folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 P &= T \frac{\partial \log Z}{\partial V} \\
 &= -T \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\pi^2} \left(\log(1 - e^{-\beta p}) \right) \\
 &= \frac{\pi^2 T^4}{90}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Für ein masseloses, wechselwirkungsfreies Bosonengas erhalten wir für das Verhältnis $\frac{P}{T^4}$:

$$\frac{P}{T^4} = \frac{\pi^2}{90} \approx 0.11. \tag{4.22}$$

Für die spezifische Entropie $s = S/V$, die Energiedichte ϵ , die spezifische Wärmekapazität $c = C_V/V$ und für die Schallgeschwindigkeit v^2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{s}{T^3} &= 4 \frac{\pi^2}{90} \approx 0.44, \\
 \frac{\epsilon}{T^4} &= \frac{\pi^2}{30} \approx 0.33, \\
 \frac{c}{T^3} &= 4 \frac{\pi^2}{30} \approx 1.3159, \\
 v^2 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.2 Thermische Feldtheorie für Fermionen

Wir betrachten die freie Dirac-Theorie, die durch den folgenden Minkowski Lagrangian definiert ist:

$$\mathcal{L}_M = \bar{\psi}_M (i \not{\partial}_M - m) \psi_M. \tag{4.24}$$

Wir gehen analog zum bosonischen Fall wieder zu imaginärer Zeit über: $x_{M,0} = -ix_0$. Dadurch wird $x_{M,0}^2 - \vec{x}^2 = -x_0^2 - \vec{x}^2 = -x^2$.

Die Gamma-Matrizen werden in Folge dessen ebenfalls in eine euklidische Variante überführt:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{i,E} &= \gamma_{i,M} \\
 \gamma_{0,E} &= i\gamma_{0,M}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Es folgt damit:

$$\mathcal{L}_E = \bar{\psi}_E (i (\gamma_0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) + m) \psi_E. \tag{4.26}$$

Wir lassen den Index E weg und überführen ψ analog wie oben in den Impulsraum:

$$\psi(x, \tau) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_n \sum_p e^{i(px + \nu_n \tau)} \psi_n(p). \quad (4.27)$$

Die genaue Form des Matsubara-Terms ν_n erhalten wir über den Erwartungswert des thermische Propagators:

$$\begin{aligned} \langle T \{ \psi(x_1, 0) \psi(x_2, -i\tau) \} \rangle &= \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \psi(x, -i\tau) \psi(x, 0) \right) \\ &\stackrel{\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)}{=} \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(\psi(x, 0) e^{-\beta \hat{H}} \psi(x, -i\tau) \right) \\ &= \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} e^{+\beta \hat{H}} \psi(x, 0) e^{-\beta \hat{H}} \psi(x, -i\tau) \right) \\ &= \frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \psi(x, -i\beta) \psi(x, -i\tau) \right) \\ &= -\frac{1}{Z[\beta, 0]} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \psi(x, -i\tau) \psi(x, -i\beta) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Wegen dem antikommutierenden Charakter der fermionischen Feldoperatoren muss also gelten:

$$\psi(x, 0) = -\psi(x, \beta). \quad (4.29)$$

Damit folgt mit Gl. (4.27) für die Matsubara-Frequenzen ν_n :

$$\nu_n = (2n + 1) \pi T. \quad (4.30)$$

Für die Zustandssumme folgt mit der Randbedingung (4.30):

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi e^{+\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E} \\ &= \prod_n \prod_p \int d\bar{\psi}_n(p) \int d\psi_n(p) e^{i \sum_n \sum_p \bar{\psi}_n(p) D \psi_n(p)} \\ &= \prod_n \prod_p \det [D] \\ &= \prod_n \prod_p \det [-\beta (\gamma_0 \nu_n + \gamma^i p_i - i \mathbb{1} m)] \\ &= \prod_n \prod_p \left\{ (\beta^2 (\nu_n^2 + \vec{p}^2 + m^2))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Mit $\omega^2 = m^2 + \vec{p}^2$ folgt für den Logarithmus von Z :

$$\begin{aligned}
 \log Z &= 2 \sum_n \sum_p \log \{ \beta^2 (\nu_n^2 + \omega^2) \} \\
 &= 2 \int d\omega^2 \sum_n \sum_p \frac{1}{\nu_n^2 + \omega^2} \\
 &= 2\beta \int d\omega^2 \sum_p \frac{\tanh\left(\frac{\omega\beta}{2}\right)}{2\omega} \\
 &= 2 \sum_p \log \cosh\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) \\
 &= 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \log \cosh\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) \\
 &= 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \beta\omega + 2 \log\left(1 + e^{-\beta\omega}\right) \right\}. \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

$\log Z$ beinhaltet sowohl Anteile von Teilchen als auch von Antiteilchen, dazu jeweils eine Nullpunktsenergie von $\frac{1}{2}\beta\omega$. Im Unterschied zum bosonischen Fall, haben wir einen zusätzlichen ein Faktor 2, der berücksichtigt, dass jeder dieser Fermionen sich in einem Spin-Up oder Spin-Down-Zustand befinden kann. Für $m = 0$ und unter Vernachlässigung der Nullpunktsenergie erhalten wir für den Druck eines wechselwirkungsfreien Fermionengases:

$$\frac{P}{T^4} = 4 \cdot \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} \approx 0.384. \tag{4.33}$$

Analog zum bosonischen Fall lassen sich daraus wieder andere thermodynamischen Observablen wie z.B. die Entropie bestimmen.

4.3 Thermische Feldtheorie und Phasenübergänge

Wir zeigen als nächstes für das NJL-Modell, dass die Überführung des Regimes mit gebrochener Symmetrie in das symmetrischen Regime durch die thermische Dynamik des Systems bewerkstelligt wird. Dazu nehmen wir Gl. (3.16) und Gl. (2.2) überführen den Lagrangian in die euklidischen Raumzeit und integrieren die fermionischen Felder aus:

$$Z[\bar{\psi}, \psi, \sigma, \vec{\pi}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\sigma \int \mathcal{D}\vec{\pi} \cdot e^{-\int d^4x \mathcal{L}_E}, \tag{4.34}$$

mit

$$\mathcal{L}_E = \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \bar{\psi} (i\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i + h(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\vec{\gamma}_5)) \psi. \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
 Z &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\sigma \int \mathcal{D}\vec{\pi} e^{-T \sum_n \int d^3x \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \log \det[(i\gamma^0 \nu_n + \gamma^i p_i + h(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5))]} \\
 &\stackrel{m=h(\sigma+i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)}{=} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\sigma \int \mathcal{D}\vec{\pi} e^{-T \sum_n \int d^3x \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \text{Tr} \log[(i\gamma^0 \nu_n + \gamma^i p_i + m)]}. \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Wir berechnen den fermionischen Teil der Zustandssumme:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \log Z_F}{\partial h\sigma} &= \beta V \text{STr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \sum_n (i\gamma^0 \nu_n + \gamma^i p_i + m)^{-1} \mathbb{1}_{a,b}^{\text{color}} \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} \\
 &\stackrel{m^2=h^2(\sigma^2+\vec{\pi}^2)}{=} 4N_c N_f \beta V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \sum_n \frac{h\sigma}{\nu_n^2 + \vec{p}^2 + m^2} \\
 &\stackrel{\vec{p}^2+m^2=E^2}{=} 4N_c N_f \beta V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{h\sigma}{2E} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \\
 &\stackrel{N=N_c N_f}{=} 8N \beta V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{h\sigma}{2E} \left(\frac{1}{2} - n_f\left(\frac{E}{T}\right)\right) \\
 \rightarrow \log Z_F &= 4NV \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{E}{T} + 2 \log\left(1 + e^{-E/T}\right)\right). \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Für die euklidische Wirkung erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
 S_E &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E \\
 &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)\right) - 4NV \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{E}{T} + 2 \log\left(1 + e^{-E/T}\right)\right). \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Wir errechnen daraus die effektive Wirkung Γ durch Gl. (2.7). In führender Ordnung ist die effektive Wirkung identisch mit der klassischen Wirkung Gl. (2.11), ausgewertet auf den klassischen Feldern σ_{cl} und $\vec{\pi}_{\text{cl}}$. Setzt man voraus, dass die Felder σ_{cl} und $\vec{\pi}_{\text{cl}}$ nicht von Raum und Zeit abhängen, so ist die effektive Wirkung eine extensive Größe und es folgt mit $\Gamma = \beta V U$ für das effektive Potential U :

$$U = \frac{m^2}{2} (\sigma_{\text{cl}}^2 + \vec{\pi}_{\text{cl}}^2) - 4N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E + 2T \log\left(1 + e^{-E/T}\right)\right). \quad (4.39)$$

Für den Grenzfall $T \rightarrow 0$ folgt für $\vec{\pi}_{\text{cl}} = 0$ und $\sigma_{\text{cl}} \ll p$:

$$U = \left(m^2 - \frac{N\Lambda^2}{\pi^2} - \mathcal{O}(\Lambda^4)\right) \frac{\sigma_{\text{cl}}^2}{2}. \quad (4.40)$$

Für $m^2 = \frac{N\Lambda^2}{\pi^2}$ haben wir also ein nichttriviales Minimum im Potential. Diejenige Kopplung λ , bei der Gl. (4.40) verschwindet, heißt kritische Kopplung λ_{kr} . Mit $\lambda = \frac{h^2}{m^2}$ folgt:

$$\lambda_{\text{kr}} = \frac{h^2 \pi^2}{N\Lambda^2}. \quad (4.41)$$

Für $T \rightarrow \infty$ kürzt sich der fermionische Beitrag Gl. (4.39) heraus und $U \propto \sigma_{\text{cl}}^2$, so dass das Potential nur ein triviales Minimum besitzt. Daraus folgt, dass zwischen $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$ ein Phasenübergang stattfinden muss.

Betrachten wir noch einmal das $O(N)$ -Modell Gl. (3.1) mit $m^2 < 0$. Die thermische Störungstheorie erhält für die Korrektur 1. Ordnung für die nackte Masse m^2 folgenden Beitrag [23],[25],[38]:

$$m^2 \rightarrow m^2 + \frac{\lambda}{24} T^2. \quad (4.42)$$

Startet man im Regime mit gebrochener Symmetrie, so wird der negative Massenterm durch Temperaturerhöhung notwendigerweise ein Vorzeichenwechsel erfahren. Diejenige Temperatur bei der der Massenterm verschwindet, heißt kritische Temperatur und beträgt nach Gl. (4.42) und $m^2 < 0$:

$$T_c = m \sqrt{\frac{24}{\lambda}}. \quad (4.43)$$

Wird also die chirale Symmetrie des $O(N)$ -Modells spontan gebrochen, so wird diese sich bei hohen Temperaturen wiederherstellen.

5 Kritische Phänomene und Scaling-Funktionen

5.1 Phasenübergänge und kritische Exponenten

Die Einteilung der Phasenübergänge erfolgt in Klassen nach der Art und Weise wie sich die thermodynamischen Größen am Phasenübergang verhalten. Die dabei relevante Größen sind die Ableitungen der freien Energiedichte. Weist die n -te Ableitung der freien Energiedichte eine Unstetigkeit auf, so redet man von einem Phasenübergang n -ter Ordnung. Diejenige Größe, die den Unterschied zwischen den Phasen charakterisiert, heißt Ordnungsparameter. Liegt ein Phasenübergang erster Ordnung vor, so ist der Ordnungsparameter im Bereich des Phasenübergangs unstetig. Ändert sich der Ordnungsparameter am Phasenübergang unter Variation eines externen Parameters der Theorie (z.B. Temperatur) stetig, so redet man von einem Phasenübergang zweiter Ordnung

Ein Beispiel für einen Ordnungsparameter ist die Magnetisierung eines Ferromagneten durch ein äußeres Feld H . Für Temperaturen unterhalb einer kritischen Temperatur T_c hängt die Magnetisierung $M(H)$ von der Vorgeschichte ab und M bekommt an der Stelle $H = 0$ einen Sprung, d.h. wir haben für $H = 0$ zwei verschiedene Grundzustände. Damit liegt ein spontaner Symmetriebruch vor. $M(H)$ beschreibt dabei die bekannte Hysteresekurve. Für $T > T_c$ verschwindet M für $H \rightarrow 0$ und M erfährt daher keinen Sprung.

Ein einfaches Modell zur Beschreibung eines Ferromagneten ist bekanntlich das Ising-Modell [39, 40]. Jeder Spin sei beschrieben durch die Spinvariable s_n . Dabei kann s_n zwei mögliche Werte annehmen $s_n = \pm 1$. Wenn wir voraussetzen, dass nur jeweils benachbarte Spins miteinander wechselwirken und wenn noch ein externes Magnetfeld H anliegt, so folgt für die Zustandssumme Z :

$$Z = \sum_{\{s_i, s_j = \pm 1\}} e^{-\beta \sum_{i=1}^N J_{ij} s_i s_j + \beta H \sum_{i=1}^N s_i}. \quad (5.1)$$

N ist dabei die Anzahl der Spins und J_{ij} die Austauschkopplung. Mit der Definition der Freien Energie F :

$$F = -T \log Z, \quad (5.2)$$

folgen die Größen:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial H}, \\ \chi &= -\frac{\partial^2 F}{\partial H^2}, \\ C &= -T^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dabei ist χ die Suszeptibilität und C die spezifische Wärme. Die genauen Ausdrücke für diese Größen interessieren uns hier nicht, wir beschränken uns auf eine allgemeine Diskussion. Für den Fall des Ising-Modells findet ein Phasenübergang bei $T \neq 0$ erst bei $d = 2$ statt [41].¹ Ein Ferromagnet hat dann die Eigenschaft unterhalb einer kritischen Temperatur T_c spontan zu magnetisieren. Bei diesem Prozess handelt es sich um einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Der Ordnungsparameter ist hier die Magnetisierung M . In der Nähe des Phasenübergangs gehorchen diese Größen einfachen Potenzgesetzen. Die Größen sind dann $\propto |T - T_c|^\#$. Der jeweilige kritische Exponent $\#$ hängt dabei nur von den Symmetrien und den räumlichen Dimensionen des betrachteten physikalischen Systems ab und nicht von den konkreten Details der Wechselwirkung. Dadurch haben die kritischen Exponenten universellen Charakter. Die Magnetisierung M skaliert für $H = 0$ nahe bei der kritischen Temperatur bei $T < T_c$ mit dem Exponenten β :

$$M \propto |T - T_c|^\beta. \tag{5.4}$$

Für $T > T_c$ gilt mit $M \rightarrow 0$ für die Suszeptibilität:

$$\chi \propto (T - T_c)^{-\gamma}. \tag{5.5}$$

Die Korrelationslänge ist $\propto \sqrt{\chi}$ und skaliert in der Nähe der kritischen Temperatur mit $\nu = \frac{\gamma}{2}$

$$\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}. \tag{5.6}$$

Die Wärmekapazität skaliert für $H = 0$ mit:

$$C \propto |T - T_c|^{-\alpha}. \tag{5.7}$$

Für $H \rightarrow 0$ und $T = T_c$ skaliert die Magnetisierung mit:

$$M \propto H^{1/\delta}. \tag{5.8}$$

¹Wenn wir für die Spins beliebige Orientierungen zulassen, dann kann es nach dem Mermin-Wagner-Theorem [42] erst in $d > 2$ Dimensionen einen Phasenübergang geben.

Für verschwindendes äußeres Feld divergiert die Korrelationslänge. Am kritischen Punkt ist die Korrelationslänge daher die einzige relevante Längenskala. Das System wird folglich unter Skalenänderung am kritischen Punkt invariant bleiben.

Diese einfache Relationen (5.4)-(5.8) gelten allerdings nur exakt für verschwindendes äußeres magnetisches Feld und die angenommenen Idealisierungen des Ising-Modells wie z.B. die räumlich isotrope Anordnung der Spins und die räumlich unendlich große Ausdehnung des Spinfeldes². Unabhängig davon ändern sich die Exponenten in diesen Relationen, wenn wir $\eta \neq 0$ zulassen.

Kann man die Größe des äußeren Feldes nicht mehr vernachlässigen, so werden die Abweichungen durch Korrekturterme beschrieben. Das gleiche gilt, wenn das zu betrachtende Modell in ein endliches Volumen gesetzt wird. Auf Grund der Universalität wird es möglich sein sogenannte Scaling-Funktionen zu definieren; temperaturabhängige Funktionen die trotz verschiedener Parameter für H (mit $H \rightarrow 0$) übereinstimmen. Gleichmaßen finden wir solche Funktionen in Falle endlichen Volumens für unterschiedliche Werte für H und L .

5.2 Scaling-Funktionen in unendlichem Volumen

Mit $f = \frac{F}{VT}$ definieren wir die freie Energiedichte. Diese kann zerlegt werden in einen singulären Teil und einen regulären Teil.

$$f = f_s(T, H, V) + f_r(T, V). \quad (5.9)$$

Der singuläre Anteil ist verantwortlich für das kritische Verhalten im Grenzfall $V \rightarrow \infty$. Betrachtet man das System am kritischen Punkt, so bleibt f_s unter Reskalierung der Länge des Systems um den Faktor l invariant³ und wir schreiben f_s wie folgt:

$$f_s(t, h) = l^{-d} f_s(l^{y_t} t, l^{y_h} h), \quad (5.10)$$

wobei t die reduzierte Temperatur und h das reduzierte äußere Feld ist:

$$\begin{aligned} t &= \frac{T - T_c}{T_0}, \\ h &= \frac{H}{H_0}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

²Details siehe [34].

³Führt man am kritischen Punkt z.B. beim Ising-Modell eine Blockspin-Transformation durch, so bleibt das Aussehen des blockspintransformierten Spinfeldes identisch. Man spricht von Skalen-Invarianz, Details siehe [35].

Es gibt hierbei nur zwei unabhängige SkalenvARIABLEN t und h und nur zwei unabhängige kritische Exponenten⁴:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{\nu}, \\ y_h &= \frac{\beta\delta}{\nu}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Damit ist l ein frei zu wählender Skalen-Faktor, welcher so gewählt werden kann, dass $l^{y_h} h = 1$ gilt. Damit ergibt sich für die Magnetisierung:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\partial f_s}{\partial H} \\ &= -\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial h} l^{-d} f_s(l^{1/\nu} t, l^{\beta\delta/\nu} h) \\ &\stackrel{l^{\beta\delta/\nu} h=1}{=} -\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{h} \right)^{-d\nu/\beta\delta} f_s(l^{1/\nu} t, 1) \\ &\stackrel{d\nu=\beta(1+\delta)}{=} h^{1/\delta} f_M(t/h^{1/\beta\delta}) \\ &= h^{1/\delta} f_M(z). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dabei ist die Scaling-Variable z wie folgt definiert:

$$z = t/h^{1/\beta\delta}. \quad (5.14)$$

$f_M(z)$ ist die Scaling-Funktion der Magnetisierung und hat die Eigenschaften, dass gilt $f_M(0) = 1$ und $f_M(z) \rightarrow (-z)^\beta$ für $z \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich für die Magnetisierung für die Grenzfälle $t \rightarrow 0$ und $h \rightarrow 0$ folgendes Verhalten:

$$\begin{aligned} M(T, 0) &= (-t)^\beta, \\ M(0, H) &= h^{1/\delta}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Diese Scaling-Funktion $f_M(z)$ kann auch noch folgendermaßen dargestellt werden:

$$y = f(x), \quad (5.16)$$

wobei

$$\begin{aligned} y &= \frac{h}{M^\delta} = f_M^{-\delta}, \\ x &= \frac{t}{M^{1/\beta}} = \left(\frac{t}{h^{1/\beta\delta}} \right) f_M^{-1/\delta}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

⁴Die Exponenten β , δ usw. sind deswegen nicht alle unabhängig von einander, weil diese allesamt durch die Exponenten y_t und y_h bestimmt sind. Die kritischen Exponenten sind daher verknüpft über Exponenten-Relationen.

Es gelten die Randbedingungen: $f(0) = 1$ und $f(-1) = 0$.

Die Funktion $y(x)$ kann dabei in folgende Reihe entwickelt werden (Griffiths-Entwicklung)⁵:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{\gamma-2\beta(n-1)} = x^{\gamma} (c_1 + c_2 x^{-2\beta} + \dots)$$

$$\stackrel{n-1=m}{=} a_1 x^{\gamma} + x^{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{-2\beta m}. \quad (5.18)$$

Für $x \rightarrow \infty$ konvergiert die Reihe in Gl. (5.18) gegen Null, so dass für $x \gg 1$ gelten sollte:

$$y \approx a_1 x^{\gamma}. \quad (5.19)$$

Wir werden in Kap. 7.5 sehen, dass man basierend auf dieser Entwicklung näherungsweise den kritischen Exponenten γ bestimmen kann.

Die Suszeptibilität ist definiert als Ableitung von f_M nach dem äußeren Feld:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{h^{1/\delta-1}}{H_0} f_{\chi}(z). \quad (5.20)$$

Mit f_{χ} erhalten wir damit die Scaling-Funktion der Suszeptibilität:

$$f_{\chi}(z) = \frac{1}{\delta} \left(f_M(z) - \frac{z}{\beta} f'_M(z) \right). \quad (5.21)$$

5.3 Scaling-Funktionen in endlichem Volumen

Für ein endliches Volumen $V = L^3$ ist der singuläre Anteil⁶ der freien Energiedichte durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$f_s(t, h, L) = l^{-d} f_s(l^{y_t} t, l^{y_h} h, L/l). \quad (5.22)$$

Wählt man für $L/l = l_0 = \text{const}$, so folgt für f_s

$$f_s = L^{-d} Q_0(K_t t L^{1/\nu}, K_h h L^{\beta\delta/\nu}), \quad (5.23)$$

mit den Konstanten $K_t = l_0^{-1/\nu+d}$ und $K_h = l_0^{-\beta\delta/\nu+d}$. Für den Ordnungsparameter ergibt sich damit:

$$M = -\frac{\partial f_s}{\partial H} = L^{-\beta/\nu} \tilde{Q}(K_t t L^{1/\nu}, K_h h L^{\beta\delta/\nu}). \quad (5.24)$$

⁵Details siehe [43]. Für kleine x eignet sich der phänomenologische Ansatz: $y(x) = c_1(1+x)^{\gamma}$.

⁶Im endlichen Volumen ist der singuläre Anteil der freien Energiedichte streng genommen nicht mehr singulär, sondern hat am (Pseudo)-Phasenübergang ein Maximum.

Wir reskalieren die Funktion \tilde{Q} so, dass sie eine Funktion von z und $\tilde{h} = hL^{\beta\delta/\nu}$ ist. Wenn z auf einen bestimmten Wert fixiert wird, wie z.B. $z = 0$, so kann \tilde{h} als Scaling-Variable verwendet werden. Damit ergibt sich die Scaling-Funktion des Ordnungsparameters für endliches Volumen:

$$Q_M(z, \tilde{h}) = M(t, h, L)L^{\beta/\nu}. \quad (5.25)$$

Die Scaling-Funktion für die Suszeptibilität lautet dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H} L^{\beta/\nu} M(t, h, L) &= \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}} Q_M(z, \tilde{h}) \\ &= \frac{1}{H_0} L^{\beta\delta/\nu} \left[Q_M^{(0,1)}(z, \tilde{h}) - \frac{z}{\beta\delta} \frac{1}{\tilde{h}} Q_M^{(1,0)}(z, \tilde{h}) \right] \quad (5.26) \\ \xrightarrow{\gamma=\beta(\delta-1)} H_0 L^{-\gamma/\nu} \chi(t, h, L) &= Q_M^{(0,1)}(z, \tilde{h}) - \frac{z}{\beta\delta} \frac{1}{\tilde{h}} Q_M^{(1,0)}(z, \tilde{h}) \equiv Q_\chi(z, \tilde{h}). \end{aligned}$$

Für $L \rightarrow \infty$ müssen sich die Scaling-Funktionen für das endliche Volumen, denen für das unendliche Volumen annähern. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} M(t, h, L) &= \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-\beta/\nu} Q_M(z, \tilde{h}) \\ &\cong \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-\beta/\nu} \tilde{h} f_M(z) \\ &= h^{1/\delta} f_M(z), \quad (5.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \chi(t, h, L) &= \lim_{L \rightarrow \infty} L^{\gamma/\nu} Q_\chi(z, \tilde{h}) \\ &\cong \lim_{L \rightarrow \infty} L^{\gamma/\nu} \tilde{h}^{1/\delta-1} \frac{1}{H_0} f_\chi(z) \\ &\stackrel{\gamma=\beta(\delta-1)}{=} h^{1/\delta-1} \frac{1}{H_0} f_\chi(z). \quad (5.28) \end{aligned}$$

Damit wird das kritische Verhalten der Theorie im endlichen Volumen durch die kritischen Exponenten des Grenzfalles unendlichen Volumens bestimmt.

6 $O(N)$ -Modell

6.1 Flussgleichungen für das symmetrische und gebrochen-symmetrische Regime

Wir leiten die Flussgleichung für ein bosonisches System mit folgender Wirkung her:

$$\Gamma_k[\phi^i(p)] = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{1}{2} p^2 \phi^i(p) \phi^i(-p) + U_k(\rho) \right\}. \quad (6.1)$$

Dabei ist $\rho = \frac{1}{2} \phi^i \phi_i$ und $p^2 = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{d-1}^2 = p_0^2 + \vec{p}^2$. Für die Auswertung der Flussgleichung mit dieser Wirkung benötigen wir die zweite funktionale Ableitung der Wirkung nach den Feldern:

$$\Gamma_{k,ab}^{(2)}(p, p') = ((p^2 + U'_k) \delta_{ab} + 2\rho U''_k \delta_{a1} \delta_{b1}) \delta^{(d)}(p - p'). \quad (6.2)$$

Wir entwickeln dabei das Feld ϕ_i um ein konstantes Hintergrundfeld $\phi \delta_{i1}$: $\phi_i = \phi \delta_{i1} + \tilde{\phi}_i$. Eingesetzt in die Flussgleichung ergibt sich:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_t R_k}{R_k + \Gamma_{k,ab}^{(2)}} \right) = \frac{1}{2} \beta V \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} \sum_{aa}^N \left(\frac{\partial_t R_k}{R_k + \Gamma_{k,aa}^{(2)}} \right). \quad (6.3)$$

Um Temperatureffekte zu studieren, ersetzen wir in Gl. (6.3) die Integration über p_0 durch die Summation über die Matsubara-Moden $p_0 = \omega_n = 2\pi nT$. Wir verwenden in Folge dessen folgenden $d - 1$ dimensionalen Regulator [44]:

$$R_k = (k^2 - \vec{p}^2) \Theta(k^2 - \vec{p}^2) \delta^{(d-1)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (6.4)$$

Da $\Gamma_{k,ab}^{(2)}(p, p')$ diagonal ist, kann es problemlos invertiert werden. Wir erhalten also mit $\Gamma_k = \beta V U_k$ und nach Summation über a :

$$\begin{aligned} \partial_t U_k &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \partial_t R_k \left(\frac{N-1}{p^2 + R_k + U'_k} + \frac{1}{p^2 + R_k + U'_k + 2\rho U''_k} \right) \\ &= \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^{d-1}} 2k^2 \left(\frac{N-1}{\omega_n^2 + k^2 + U'_k} + \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + U'_k + 2\rho U''_k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{d=4}{=} \frac{k^5}{12\pi^2} \left((N-1) \frac{\coth(\frac{\sqrt{k^2+U'_k}}{2T})}{\sqrt{k^2+U'_k}} + \frac{\coth \frac{\sqrt{k^2+U'_k+2\rho U''_k}}{2T}}{\sqrt{k^2+U'_k+2\rho U''_k}} \right) \\
 & = \frac{k^5}{12\pi^2} \left\{ (N-1) \frac{1}{\sqrt{k^2+M_\pi^2}} (1+2n_B(M_\pi)) + \frac{1}{\sqrt{k^2+M_\sigma^2}} (1+2n_B(M_\sigma)) \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Dabei sind $M_\pi^2 = U'_k$, $M_\sigma^2 = U'_k + 2\rho U''_k$ die Ausdrücke der Massen und die $n_B(M_i)$ Einstein-Bose-Verteilung

$$n_B = \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{k^2+M_i^2}}{T}} - 1}, \quad i \in (\pi, \sigma). \tag{6.6}$$

Wir wählen für das symmetrische Regime folgenden Ansatz:

$$U_{k,sym} = U_{0,k} + m_k^2 \rho + \frac{\lambda}{3!} \rho^2. \tag{6.7}$$

Wir erhalten für m_k^2 und λ_k Differentialgleichungen, indem wir Gl. (6.7) in Gl. (6.5) einsetzen und die rechte Seite der Gleichung bis zur Ordnung ρ^2 um das Minimum vom $U_{k,sym}$ entwickeln. Danach führen wir einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten für den Grenzfall $T \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 \partial_t m_k^2 &= -\frac{k^5}{72\pi^2} \frac{(N+2)\lambda_k}{(k^2+m_k^2)^{3/2}}, \\
 \partial_t \lambda_k &= \frac{k^5}{48\pi^2} \frac{(N+8)\lambda_k^2}{(k^2+m_k^2)^{5/2}}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Im symmetrischen Regime haben alle Propagatoren einen Massenterm. Für das gebrochen-symmetrische Regime wählen wir folgenden Ansatz:

$$U_{k,br} = U_{0,k} + \frac{\lambda}{3!} (\rho - \rho_{0,k})^2. \tag{6.9}$$

Mit dem skalenabhängigen nicht trivialen Potential-Minimum $\rho_{0,k}$. Wir erhalten folgende Differentialgleichungen für das gebrochen-symmetrische Regime im Grenzfall verschwindender Temperatur:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \lambda_k &= \frac{k^5}{2\pi^2} \lambda_k^2 \left(\frac{N-1}{24k^5} + \frac{3}{8} \frac{1}{(k^2 + \frac{2}{3}\lambda_k \rho_{0,k})^{5/2}} \right), \\
 \partial_t \rho_{0,k} &= \frac{k^5}{4\pi^2} \left(\frac{N-1}{6k^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2 + \frac{2}{3}\lambda_k \rho_{0,k})^{3/2}} \right).
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

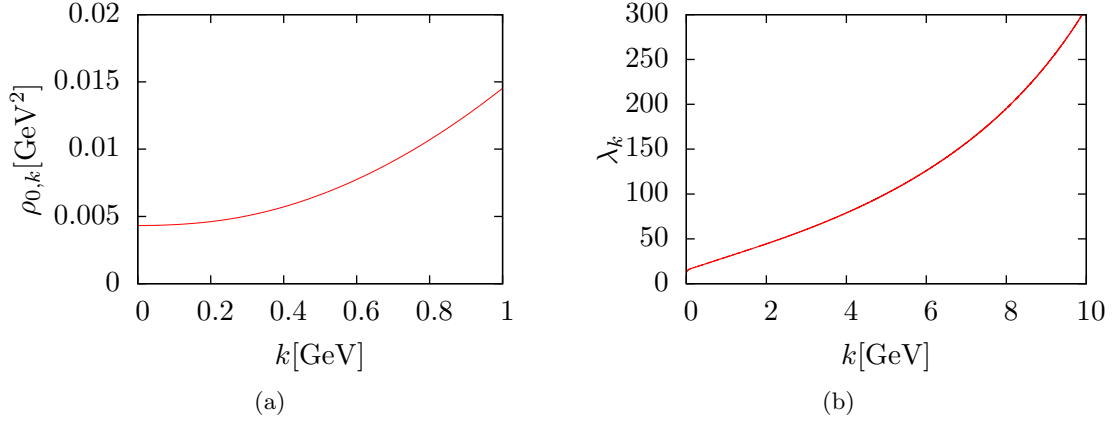


Abbildung 6.1: (a): Ordnungsparameter $\rho_{0,k}$ in Abhängigkeit der Skala bei $T = 0$, (b): Kopplung λ_k in Abhängigkeit von der Skala k bei $T = 0$.

Wir sehen, dass wir im Falle des gebrochen-symmetrischen Regime $N - 1$ masselose Propagatoren bekommen. Diese sind die Goldstone-Bosonen, die man in der QCD als Pionen bezeichnet.

Aus den Flussgleichungen läßt sich noch der skalenabhängige thermodynamische Druck P_k bestimmen, der durch das Potential an der Stelle des Minimums $U_k|_{\rho=\rho_{0,k}}$ gegeben ist.

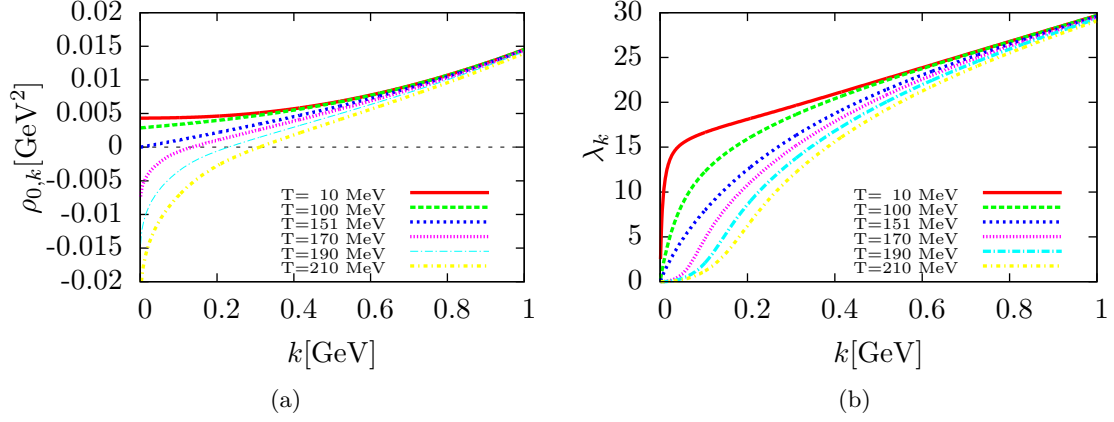
$$\begin{aligned}
 \partial_t U_{0,k} &= U_k|_{\rho=\rho_{0,k}} \\
 &= -\partial_t P_k \\
 &\equiv T \frac{\partial}{\partial V} \Gamma_k|_{\rho=\rho_{0,k}}.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

erhalten wir einen Ausdruck für den Druck beider Regime des Bosonengases (analog ist es beim Quark-Meson-Modell).

6.2 Numerische Lösungen des $O(N)$ -Modells bei endlicher Temperatur

Im Folgenden setzen wir $N = 4$. Die vollständigen Lösungen¹ der obigen Flussgleichungen (6.5) für das symmetrische und gebrochen-symmetrische Regime bei endlicher Temperatur werden numerisch gelöst.

¹Wir betrachten oben nur die Grenzfälle $T \rightarrow 0$. Analytisch ist der Large- N Limes: $N \rightarrow \infty$ für $T \rightarrow 0$ lösbar.


 Abbildung 6.2: (a): $\rho_{0,k}$ in Abhängigkeit von k , (b): λ in Abhängigkeit von k .

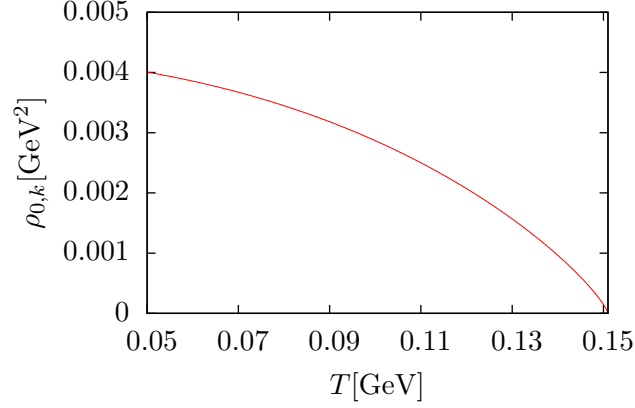
Zunächst müssen Startparameter für die Differentialgleichungen gefunden werden. Die Startparameter sind die Funktionswerte von $\rho_{0,k}$ und λ_k am UV-Cutoff Λ . Wir schauen uns das Regime mit gebrochener Symmetrie für den Fall $T = 0$ an und bestimmen die Werte für die Kopplung λ und $\rho_{0,k}$ am UV-Cutoff so, dass am IR-Cutoff die physikalische Pionenzfallskonstante $f_\pi = \sqrt{2\rho_{0,k}}$ von 93.0 MeV und die Pionenmasse von 138 MeV gegeben ist, siehe Abb. 6.1. Der Druck am Cutoff ist gleich Null gesetzt. Dabei ist der UV-Cutoff so einzustellen, dass $\frac{2\pi T}{\Lambda} \ll 1$ gilt (Begründung siehe Kap. 7.3). Der UV-Cutoff ist wie folgt gewählt $\Lambda = 10 \text{ GeV}$. Für den IR-Cutoff wählen wir $k = k_{\text{min}} = 10^{-3} \text{ GeV}$.

Mit diesen gefundenen Startparametern am UV-Cutoff werden die Differentialgleichungen für das Regime mit gebrochener Symmetrie für verschiedene vorgegebene Temperaturen gelöst. Die Resultate für die Größen $\rho_{0,k}$ und die ϕ^4 -Kopplung λ_k sind in Abb. 6.2 gegeben. In Abb. 6.2a sieht man, dass $\rho_{0,k}$ ab einer bestimmten Temperatur ein Vorzeichenwechsel auf einer bestimmten Skala $k = k_{\text{SB}}$ erfährt. Diese k_{SB} sind für jede Temperatur $T > T_c$ zu bestimmen und ab dort startet das Regime mit wiederhergestellter $O(N)$ Symmetrie. Das bedeutet, dass ab einer bestimmten Skala mit dem Vorzeichenwechsel des Ordnungsparameters ein Regimewechsel stattfindet. Damit liefert $k = k_{\text{SB}}$ die Anschlussbedingungen für das symmetrische Regime.

Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} \rho_{0,k}(k_{\text{SB}}) &= m_k^2(k_{\text{SB}}), \\ \lambda_{\text{br}}(k_{\text{SB}}) &= \lambda_{\text{sym}}(k_{\text{SB}}), \\ P_{\text{br}}(k_{\text{SB}}) &= P_{\text{sym}}(k_{\text{SB}}). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Bleibt ein Vorzeichenwechsel beim Ordnungsparameter bei bestimmten Temperaturen aus, so verbleiben wir im Regime mit gebrochener Symmetrie. Diejenige Temperatur,


 Abbildung 6.3: $\rho_{0,k}$ in Abhängigkeit von T für $k = k_{\min}$.

bei der der Ordnungsparameter für $k \rightarrow 0$ identisch Null ist, heißt kritische Temperatur T_c , siehe Abb. (6.3). Wir finden folgende kritische Temperatur:

$$T_c = 0.1510097731947240 \text{ GeV}. \quad (6.13)$$

Dabei beträgt an der Stelle $T = T_c$ $\rho_{0,k} \big|_{k=k_{\min} \rightarrow 0} \approx \mathcal{O}(10^{-12}) \text{ GeV}^2$. Wie oben schon erwähnt, zeichnet sich das Regime mit gebrochener Symmetrie durch die Existenz von $N - 1$ masselosen Goldstone-Bosonen aus, die ab $T = T_c$ massiv werden.

Dabei sind uns die Massen gegeben durch:

$$M_\pi^2 = \partial_\rho U_k \big|_{\rho=\rho_{0,k}}, \quad (6.14)$$

$$M_\sigma^2 = (\partial_\rho U_k + 2\rho \partial_\rho^2 U_k) \big|_{\rho=\rho_{0,k}}. \quad (6.15)$$

Für unsere Regime ergibt sich damit:

$$M_{\pi,br}^2 = 0, \quad (6.16)$$

$$M_{\sigma,br}^2 = \frac{2}{3} \lambda_k \rho_{0k}, \quad (6.17)$$

Die Massen aufgetragen über der Temperatur findet man in Abb. 6.4a. Wie zu erwarten, sind die Pionenmassen im Regime mit gebrochener Symmetrie für alle $T < T_c$ gleich Null. $M_{\sigma,br}$ und m_k verschwinden bei der kritischen Temperatur. Man sieht, dass der Massenterm für das symmetrische Regime für Temperaturen $T > T_c$ näherungsweise proportional zu \sqrt{T} ist.

Sind die Temperaturen genügend groß, d.h. weit genug entfernt vom Phasenübergang,

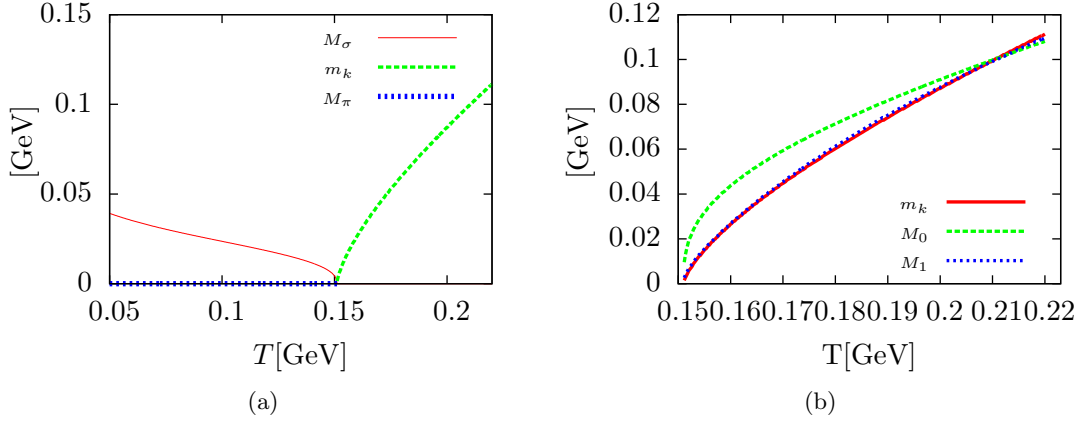


Abbildung 6.4: (a): M in Abhängigkeit von T , (b): m_k , M_0 und M_1 in Abhängigkeit von T .

so reproduziert sich die 1-Loop-Korrektur der Störungstheorie und der Massenterm wird proportional zur T . Die Wurzelabhängigkeit kann analytisch bestimmt werden. Wir schauen uns dazu die Flussgleichung für das symmetrische Regime bei nicht ausgeführter Matsubara-Summe an:

$$\partial_t U_k = \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2k^2 \left\{ \frac{(N-1)}{4\pi^2 n^2 T^2 + k^2 + U'_k} + \frac{1}{4\pi^2 n^2 T^2 + k^2 + U'_k + 2\rho U''_k} \right\}. \quad (6.18)$$

Für große Temperaturen trägt effektiv nur die Nullmode der Matsubara-Summe ($n = 0$) zur Flussgleichung bei, da die Propagatoren auf Grund der Temperatur immer schwerer werden und folglich Moden mit $n \neq 0$ vernachlässigt werden können. Für die Differentialgleichung des Massenterms m_k^2 ergibt sich:

$$\partial_t m_k^2 = -T \frac{(N+1)k^5 \lambda_k}{18\pi^2 (k^2 + m_k^2)^2}. \quad (6.19)$$

Sofern wir die Temperaturabhängigkeit der Kopplung λ_k vernachlässigen, skaliert die Masse m_k mit \sqrt{T} :

$$m_k \propto \sqrt{T} f(k) \propto c_1 T^{1/2} k_{\text{SB}}^{1/2} = M_0. \quad (6.20)$$

Das Ergebnis dieser Abschätzung sieht man in Abbildung 6.4b. Aus dieser geht hervor, dass es bei dieser Abschätzung nicht genügt nur die Matsubara-Nullmode zu betrachten. Wenn wir noch die Matsubara-Moden für $n = -1$ und $n = 1$ mit hinzunehmen und wenn

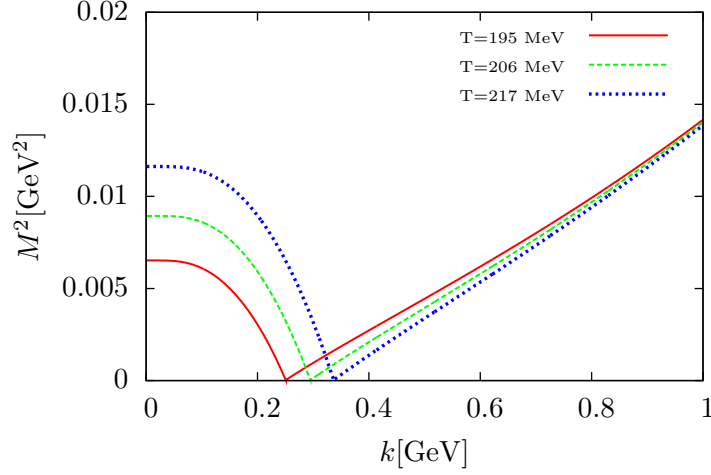


Abbildung 6.5: m_k^2 und $\rho_{0,k}$ in Abhängigkeit von k für die angegebenen Temperaturen.

wir voraussetzen, dass $x = \frac{k^2 + m_k^2}{4\pi^2 T^2} \ll 1$ gilt, so erhalten wir bei einer Entwicklung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(x)$ für m_k folgende Abschätzung:

$$m_k \approx c_1 T^{1/2} k_{\text{SB}}^{1/2} + c_2 T^{-3/2} k_{\text{SB}}^{5/2} + c_3 T^{-5/2} k_{\text{SB}}^{7/2} \equiv M_1 \quad (6.21)$$

Die c_i sind Fitkoeffizienten. M_1 approximiert m_k zweifellos besser als M_0 , siehe Abb. 6.4b.

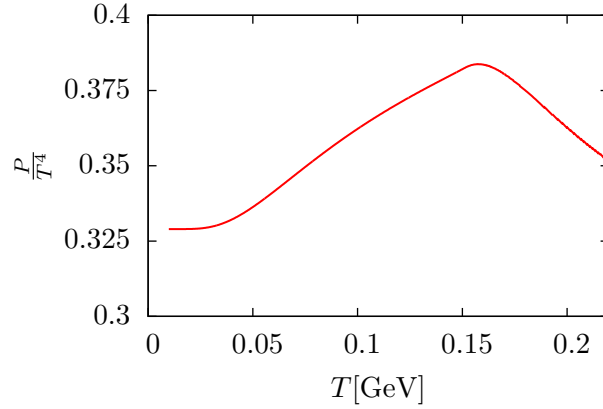
Die Lösung des Massenterms (d.h. der Massenterme im Lagrangian $M^2 = (m_k^2, \rho_{0,k}^2)$) für das Gesamtsystems in Abhängigkeit der Skala für einige ausgewählte Temperaturen zeigt Abb. 6.5. Wir sehen, dass der Regimewechsel bei um so größeren Skalen einsetzt je höher die betrachtete Temperatur ist; und um so größer ist der Wert für m_k^2 am IR-Cutoff. Daher ist die Wahl für $f(k) = \sqrt{k_{\text{SB}}}$ in Gl. (6.20) gerechtfertigt.

Für die Bestimmung des thermodynamischen Drucks bei endlicher Temperatur, ändern wir unsere Differentialgleichung für den Druck derart, dass der $T = 0$ -Anteil herausgenommen wird:

$$-\partial_t P_{k,br} = \frac{k^5}{12\pi^2} \left(\frac{2(N-1)}{k(e^{\frac{k}{T}} - 1)} + \frac{2}{\sqrt{k^2 + \frac{2}{3}\lambda_k \rho_{0,k}} (e^{\frac{\sqrt{k^2 + \frac{2}{3}\lambda_k \rho_{0,k}}}{T}} - 1)} \right). \quad (6.22)$$

Tut man das nicht so liefert z.B. der $T = 0$ -Anteil des Pionenterms folgenden Beitrag für den Druck:

$$P_k = \int_{\Lambda}^{k \rightarrow 0} dk \left\{ \frac{-k^3(N-1)}{12\pi^2} \right\} \propto \Lambda^4. \quad (6.23)$$


 Abbildung 6.6: P/T^4 in Abhängigkeit von T .

Offensichtlich ist diese Umformulierung sinnvoll, da der $T = 0$ -Anteil um Größenordnungen größer ist, als die durch die Temperatur erzeugte Dynamik des Druckes. Die Temperaturabhängigkeit des thermodynamischen Druckes ließe sich nicht auflösen mit dem temperaturunabhängigen Anteil desselben. Den Verlauf von $\frac{P}{T^4}$ in Abhängigkeit von T zeigt Abb. 6.6. Für $T \rightarrow 0$ ist die Dynamik des Bosonengases durch die drei Goldstone-Bosonen bestimmt. Wir sehen, dass für $T \ll T_c$ der Druck den Wert eines masselosen, wechselwirkungsfreien Bosongases annimmt:

$$\frac{P}{T^4} = \frac{(N-1)\pi^2}{90} = \frac{3\pi^2}{90} \approx 0.33. \quad (6.24)$$

Diese Verhalten ist auf die geringe Stärke der Wechselwirkungen der Goldstone-Bosonen untereinander zurückzuführen. Mit zunehmender Temperatur wächst $\frac{P}{T^4}$ und erreicht sein Maximum von $\left.\frac{P}{T^4}\right|_{\max} = 0.38378$ bei einer Temperatur von $T = 157.52$ MeV. $\frac{P}{T^4}$ wächst mit zunehmender Temperatur daher, weil die Masse des Sigma-Bosons $M_{\sigma,br}$ mit zunehmender Temperatur sinkt. Beim Phasenübergang beobachtet man nicht das Stefan-Boltzmann-Verhalten von vier masselose Bosonen, nach dem der Druck folgenden Wert annehmen müßte:

$$\frac{P}{T^4} = \frac{N\pi^2}{90} = \frac{4\pi^2}{90} \approx 0.44. \quad (6.25)$$

Die Abweichung hat ihre Ursache darin, dass in der Nähe Phasenübergangs, die Bosonen stark wechselwirken. Ist das Maximum erreicht so nimmt die Größe von $\frac{P}{T^4}$ ab. Das liegt wiederum daran, da die Bosonen im symmetrischen Regime mit zunehmender Temperatur immer massiver werden. Da kein masseloses Goldstone-Boson in der symmetrischen

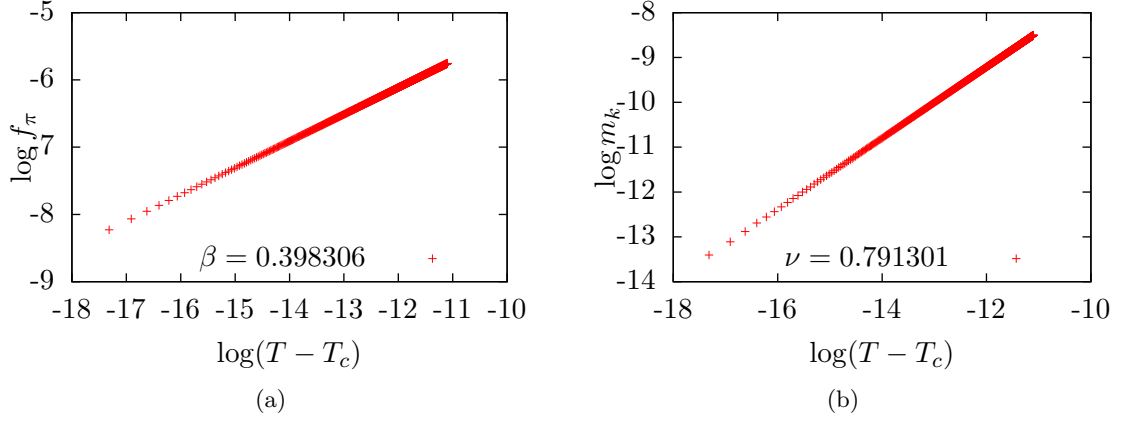


Abbildung 6.7: (a): $\log(f_\pi)$ in Abhängigkeit von $\log(T - T_c)$, (b): $\log(m_k)$ in Abhängigkeit von $\log(T - T_c)$.

Phase existiert, ist zu erwarten dass der Druck für $T \rightarrow \infty$ verschwindet. Wir betrachten das störungstheoretische Ergebnis für die dynamische Erzeugung einer thermischen Masse:

$$m^2 \rightarrow m^2 + \delta m^2 = m^2 + \frac{\lambda}{24} T^2. \quad (6.26)$$

Mit $T \rightarrow \infty$ erwarten wir daher, dass $M_{\pi, \text{sym}} = M_{\sigma, \text{sym}} \rightarrow \infty$ wenn $T \rightarrow \infty$. Daraus folgt, dass $\frac{P}{T^4}$ gegen Null konvergieren sollte, wenn man $T \rightarrow \infty$ betrachtet.

Im folgenden bestimmen wir kritische Exponenten des $O(4)$ -Modells. In Kap. (5.1) wurde diskutiert, dass nahe der kritischen Temperatur die Observablen einfachen Potenzgesetzen gehorchen. Die Exponenten dieser Potenzgesetze sind die kritischen Exponenten. Wir bestimmen diese aus den folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} f_\pi &= a_\beta \cdot (T - T_c)^\beta, \\ m &= a_\nu \cdot (T - T_c)^\nu, \\ \chi &= a_\gamma \cdot (T - T_c)^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Dabei sind diese Größen zu betrachten für $k \rightarrow 0$ und bei Temperaturen für die $\frac{|T - T_c|}{T_c} \ll 1$ gilt. Die Pionenzerfallskonstante ist zu betrachten für Temperaturen $T < T_c$, der Massenterm des symmetrischen Regimes und die Suszeptibilität für Temperaturen $T > T_c$. Wir bestimmen die Exponenten und die Koeffizienten a_i indem wir auf beiden Seiten der Gleichungen 6.27 den Logarithmus bilden und wir definieren $\log(a_i) \rightarrow a_i$. Wir erwarten ein lineares Verhalten. Der jeweilige kritische Exponent ist dann der Anstieg der Gerade. Der Koeffizient a_i ist der jeweilige Offset beim Nulldurchgang. Die Resultate für Gl.(6.27 a-b) sind dargestellt in Abb. 6.7. In Tab. 6.1 sind die numerischen

a_β	β	a_ν	ν	a_γ	γ
0.133408	0.398306	-0.991584	0.791301	1.98317	1.5826

Tabelle 6.1: kritische Exponenten und dazugehörige Koeffizienten. Vergleiche z.B. mit [11, 45].

Werte für die Koeffizienten und die kritischen Exponenten angegeben. Es gelten in drei räumlichen Dimensionen und für $\eta \propto \partial_t \log Z_{\phi,p,k} = 0$ die folgenden Relationen zwischen den Exponenten² [15]:

$$\frac{\gamma}{2} = \nu = 2 \cdot \beta. \quad (6.28)$$

Dass $\frac{\gamma}{2} = \nu$ exakt gilt, liegt daran weil die dazugehörigen Größen keine voneinander unabhängigen Observablen beschreiben. Eine bessere Übereinstimmung zwischen $\nu/2$ und β sollte man erreichen, in dem man einen Potentialansatz wählt, indem noch höhere Selbstwechselwirkungsterme $\propto \phi^6, \propto \phi^8, \dots$, zugelassen werden. Das soll hier allerdings nicht durchgeführt werden.

6.3 Gültigkeitsgrenzen des $O(N)$ -Modells

Wir untersuchen die Gültigkeitsgrenzen für das $O(4)$ -Modell. Wir werden sehen, dass die Vierpunkt-Kopplung im Bereich mit gebrochener Symmetrie für $k \rightarrow 0$ verschwindet, siehe Abb. 6.8. Dazu schauen wir uns die Matsubara-Nullmode der entsprechenden Flussgleichung an und betrachten wegen $M_\pi \ll M_\sigma$ nur den Pionenanteil der Flussgleichung der Kopplung:

$$\partial_t \lambda_k = \frac{T \lambda_k^2 (N-1)}{9k\pi^2}. \quad (6.29)$$

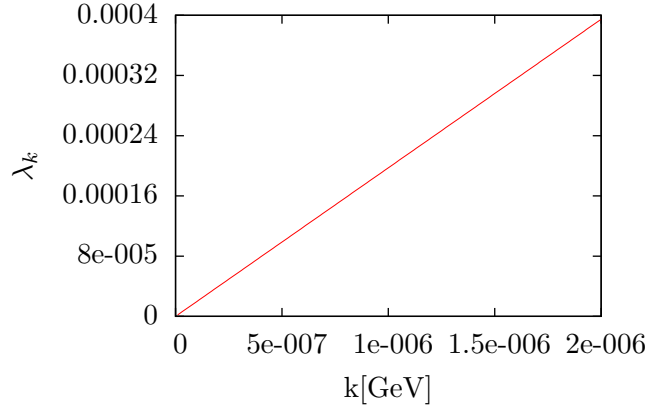
Wir erhalten als Lösung für λ_k mit $k \rightarrow 0$:

$$\lambda_k = \frac{\lambda_\Lambda}{1 + \frac{\lambda_\Lambda T}{9\pi^2 k}} \approx 9\pi^2 \lambda_\Lambda \frac{k}{T} + \mathcal{O}(k^2/T^2) = C_0 \frac{k}{T}. \quad (6.30)$$

Für $k \rightarrow 0$ verschwindet die Kopplung λ_k . Wegen Gl. (6.30) folgt daraus, dass die Masse des Sigma-Bosons im IR verschwindet, d.h. im Regime mit gebrochener Symmetrie würde gelten: $M_\pi = M_\sigma = 0$. Die Massen des Sigma-Mesons und der Goldstone-Bosonen wären entartet. Wir hätten damit vier masselose Teilchen.

Wir haben unserer Ausgangswirkung folgende Vereinfachung zu Grunde gelegt: es wurde von einer möglichen Skalen- und Impulsabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung $Z_{\phi,p,k}$ abgesehen, d.h. $Z_{\phi,p,k}=1$. Unsere Wirkung aus Gl. (6.1) müßte also wie

² η bezeichnet die anormale Dimension.


 Abbildung 6.8: λ_k in Abhängigkeit von k mit $k \rightarrow 0$.

folgt abgeändert werden.

$$\Gamma_k[\phi^i(p)] = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} Z_{\phi,p,k} \left\{ \frac{1}{2} p^2 \phi^i(p) \phi^i(-p) + U_k(\rho) \right\}. \quad (6.31)$$

Wir erwarten, dass eine Berücksichtigung der vollen Impulsabhängigkeit verhindert, dass die Kopplung für $k \rightarrow 0$ verschwindet. Das soll an dieser hier nicht gezeigt werden.

Die Matsubara-Nullmode von Gl. (6.18) kann für das gebrochene Regime mit $\lambda_k T = \lambda_{k,3D}$ als ein temperaturloses $O(4)$ -Modell in drei Dimensionen angesehen werden. Für die Entwicklung (6.30) folgt damit:

$$\lambda_k = \frac{\lambda_{3D}}{k} \frac{k}{T} = \bar{\lambda}_{3D} \frac{k}{T} \equiv \bar{\lambda}^* \frac{k}{T}. \quad (6.32)$$

Die Konstante C_0 wird damit mit dem nicht-trivialen dimensionslosen Fixpunkt $\bar{\lambda}^*$ des $O(4)$ -Modells in drei Dimensionen identifiziert. Der numerische Wert dieses Fixpunktes ist abhängig von der Form des verwendeten Regulators.

Für $k \rightarrow 0$ und $T < T_c$ erhalten wir für (6.30) den Anstieg aus Abb. 6.8b:

$$C_0 = 29.61. \quad (6.33)$$

Für ein temperaturabhängiges $O(4)$ -Modell in drei Dimensionen (d.h. mit einem $d = 2$ -Regulator) erhalten wir für den Fluss der dimensionslosen Kopplung:

$$\partial_k \bar{\lambda}_k = -\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_k^2 \left(\frac{N-1}{32\pi} + \frac{1}{32\pi(1 + \frac{2}{3}\bar{\rho}_{0k}\bar{\lambda}_k)^{5/2}} \right). \quad (6.34)$$

Einen Fixpunkt erreicht der Fluss bekanntlich, wenn $\partial_k \bar{\lambda}_k = 0$ ist. Die aus dieser Bedingung folgende Gleichung kann im Large- N -Limes analytisch gelöst werden. Wir erhalten mit $N = 4$ für den Fixpunkt $\bar{\lambda}^*$:

$$\bar{\lambda}^* = 25.13. \quad (6.35)$$

Die relative Abweichung von $\bar{\lambda}^*$ zu C_0 beträgt $\approx 18\%$. Die Abweichung ist verständlich, da ein Large- N -Limes hier nicht vorliegt.

Damit werden wir die Diskussion des $O(4)$ -Modells schließen. Im folgenden betrachten wir das Quark-Meson-Modell. Wir erhalten das Quark-Meson-Modell formal aus dem $O(4)$ -Modell durch Hinzufügen fermionische Anteile: einen kinetischen und einen Wechselwirkungsterm, in dem die bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade über die Yukawa-Kopplung verknüpft sind. Das Quark-Meson-Modell entspricht dem bosonisierten NJL-Modell, das wir temperaturunabhängig hinsichtlich Symmetriebrechung bereits im Kap. 3 untersucht haben. Wir lassen allerdings im Unterschied dazu auch höhere Selbstwechselwirkungsterme der Bosonen $\propto \phi^6$, $\propto \phi^8$, ... zu. Anders als im Kap. (6.1), werden wir eine explizite Symmetriebrechung hinzufügen, so dass wir statt zweier Potentialansätze für das symmetrische und gebrochen symmetrische Regime, denselben Satz an Flussgleichungen verwenden können. In denjenigen Bereichen in denen der Einfluss der Fermionen auf die Flussdynamik gering ist, sollten Ergebnisse des $O(4)$ -Modells reproduzierbar sein.

7 Quark-Meson-Modell in unendlichem Volumen

7.1 Flussgleichung für das Quark-Meson-Modell in unendlichem Volumen

Die Wirkung für das Quark-Meson-Modell in euklidischer Metrik lautet:

$$\Gamma_k = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi})^2 + U_k(\rho, \sigma) + \bar{\Psi}_{a,\alpha} \mathbb{1}_{a,b}^{\text{color}} i \not{\partial} \Psi_{b,\beta} \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} + h \bar{\Psi}_{a,\alpha} \mathbb{1}_{a,b}^{\text{color}} M_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}) \Psi_{b,\beta} \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} \right\}. \quad (7.1)$$

Dabei ist $\vec{\phi} = (\vec{\pi}, \sigma)$ das bosonische Feld mit 4 Komponenten, h die Yukawa-Kopplung und die Matrix $M_{\alpha,\beta}$

$$M_{\alpha,\beta} = (\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \mathbb{1}_{\alpha,\beta}. \quad (7.2)$$

Zum obigen Lagrangian addieren wir noch folgenden Massen-Term:

$$M_{\bar{\Psi},\Psi} = \bar{\Psi}_{a,\alpha} \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} R_k \Psi_{b,\beta} \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}}, \quad (7.3)$$

mit dem $d = 3$ -Regulator:

$$R_k = \not{p} \left(\sqrt{\frac{k^2}{\vec{p}^2}} - 1 \right) \Theta(k^2 - \vec{p}^2) \mathbb{1}_{ab}^{\text{Color}} \delta(p - p') = \not{p} r_k \mathbb{1}_{ab}^{\text{Color}} \delta(p - p'). \quad (7.4)$$

Wir transformieren unsere Felder in den Impulsraum:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Psi(p) e^{ipx}, \\ \bar{\Psi}(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(-p) e^{-ipx}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

und führen einen verallgemeinerten Feldvektor ein:

$$\begin{aligned} \chi(p) &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \Psi(p) \\ \bar{\Psi}^T(-p) \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ \chi^T(p) &= (\dots, \bar{\Psi}^T(-p), \Psi(p), \dots). \end{aligned} \quad (7.6)$$

und schreiben den fermionischen Teil der Wirkung $\Gamma(p)$ als:

$$\Gamma_F(p) = \frac{1}{2} (\Gamma^T(p) + \Gamma(p)). \quad (7.7)$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Gamma_F(p, q) = & \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}_{a,\alpha}(p) \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}}(-\not{p}) \Psi_{b,\beta}(p) \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} \\ & + h \bar{\Psi}_{a,\alpha}(p) \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} M_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}(p-q)) \Psi_{b,\beta}(q) \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} \\ & + \bar{\Psi}_{a,\alpha}(p) \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} R_{k,ab} \Psi_{b,\beta}(p) \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} \\ & + \Psi_{a,\alpha}^T(-p) \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}}(-\not{p})^T \bar{\Psi}_{b,\beta}^T(-p) \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} \\ & + h \Psi_{a,\alpha}^T(-p) \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} M_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}(p-q)) \bar{\Psi}_{b,\beta}^T(-q) \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}} \\ & + \Psi_{a,\alpha}^T(-p) \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} R_{k,ab}^T \bar{\Psi}_{b,\beta}^T(-p) \mathbb{1}_{\alpha,\beta}^{\text{flavor}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Für die Auswertung der Flussgleichung benötigen wir die zweite funktionale Ableitung der Gesamtwirkung nach den Feldern (Flavor- und Color-Indizes werden nicht explizit angegeben):

$$\Gamma^{(2)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \vec{\phi}(-p')} \\ \frac{\delta}{\delta \Psi^T(-p')} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(p')} \end{pmatrix} \Gamma(p, q) \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \vec{\phi}(p'')} & \frac{\delta}{\delta \Psi^T(p'')} & \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(-p'')} \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Wir erhalten:

$$\Gamma^{(2)}(p, p') = \begin{pmatrix} ((p^2 + U'_k) \delta_{ij} + 2\rho U''_k \delta_{i1} \delta_{j1}) \delta(p-p') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\not{p}^T + R_k^T(p) + hM^T(p-p')) \delta(p-p') \\ 0 & \frac{1}{2}(\not{p} + R_k(p) + hM(p-p')) \delta(p-p') & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Wir betrachten nur den rein fermionischen Anteil¹:

$$\Gamma_F^{(2)}(p, p') = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\not{p}^T + R_k^T(p) + hM^T(p-p')) \delta(p-p') \\ \frac{1}{2}(\not{p} + R_k(p) + hM(p-p')) \delta(p-p') & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

¹Der bosonische Anteil wurde bereits im Kap. 6.1 gerechnet, dieser wurde in Gl. (7.14) eingesetzt.

Es folgt die Auswertung der Spur:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma &= -\frac{1}{2} \text{STr} \left(\partial_t R_k \cdot [\Gamma_F^{(2)}(p, p')]^{-1} \right) \mathbb{1}_{\alpha, \beta}^{\text{flavor}} \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} \\
 &= -\frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_t R_k^T \\ \partial_t R_k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{p^T + hM^T + R_k^T} \\ \frac{2}{p^T + hM + R_k} & 0 \end{pmatrix} \right\} \delta(p - p') \mathbb{1}_{\alpha, \beta}^{\text{flavor}} \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} \\
 &= -\frac{1}{2} \text{STr} \begin{pmatrix} \frac{\partial_t R_k}{p^T + hM + R_k} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_t R_k^T}{p^T + hM^T + R_k^T} \end{pmatrix} \delta(p - p') \mathbb{1}_{\alpha, \beta}^{\text{flavor}} \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} \\
 &= -\frac{1}{2} \text{STr} \left(\frac{\partial_t R_k}{p^T + hM + R_k} + \frac{\partial_t R_k^T}{p^T + hM^T + R_k^T} \right) \delta(p - p') \mathbb{1}_{\alpha, \beta}^{\text{flavor}} \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} \\
 &= -\text{STr} \left(\frac{\partial_t R_k}{p^T + hM + R_k} \right) \delta(p - p') \mathbb{1}_{\alpha, \beta}^{\text{flavor}} \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} \\
 &= -\text{STr} \left(\frac{\partial_t \vec{p} r_k}{hM + \gamma^0 p_0 + \vec{p}(1 + r_k)} \right) \delta(p - p') \mathbb{1}_{\alpha, \beta}^{\text{flavor}} \mathbb{1}_{ab}^{\text{color}} \Theta(k^2 - \vec{p}^2) \\
 &= -\text{Tr} \left(4N_f N_c \frac{\vec{p}^2 (1 + r_k) \partial_t r_k}{p_0^2 + \vec{p}^2 (1 + r_k)^2} \right) \delta(p - p') \Theta(k^2 - \vec{p}^2) \\
 &= -\beta V \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \left(4N_f N_c \frac{\vec{p}^2 (1 + r_k) \partial_t r_k}{p_0^2 + \vec{p}^2 (1 + r_k)^2} \right) \delta(p - p') \Theta(k^2 - \vec{p}^2). \quad (7.12)
 \end{aligned}$$

Mit $p_0 = \nu_n = (2n + 1)\pi T$ und $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ erhalten wir schließlich

$$\partial_t \Gamma_F = -\beta V 4N_f N_c \frac{k^5}{12\pi^2} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{k^2 + h^2 \vec{\phi}^2}}{2T} \right)}{\sqrt{k^2 + h^2 \vec{\phi}^2}}. \quad (7.13)$$

Mit dem Ausdruck der Quarkmasse $M_Q^2 = h^2 \vec{\phi}^2 = 2h^2 \rho_{0,k}$ erhalten wir die Flussgleichung für das Quark-Meson-Modell:

$$\partial_t \Gamma_k = \beta V \frac{k^5}{12\pi^2} \left\{ (N - 1) \frac{\coth \frac{\sqrt{k^2 + M_\pi^2}}{2T}}{\sqrt{k^2 + M_\pi^2}} + \frac{\coth \frac{\sqrt{k^2 + M_\sigma^2}}{2T}}{\sqrt{k^2 + M_\sigma^2}} - 4N_f N_c \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{k^2 + M_Q^2}}{2T} \right)}{\sqrt{k^2 + M_Q^2}} \right\}. \quad (7.14)$$

7.2 Numerische Lösungen

Wir verwenden folgenden Ansatz für das Potential:

$$U_k(\rho, \sigma) = \sum_{n=0}^{N_{max}=\infty} \frac{a_{k,n}}{n!} (\rho - \rho_{0,k})^n + c\sigma. \quad (7.15)$$

Dabei sind $m_k^2 = a_{k,1}$ und $\frac{\lambda_k}{3} = a_{k,2}$. N_{max} bezeichnet die sogenannte Trunkierungsordnung. Das Minimum des Potentials soll bei $\rho = \rho_{0,k}$ liegen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_k(\rho, \sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\rho=\rho_{0,k}} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{n!} (\rho - \rho_{0,k})^n + c \right\} \right) \Big|_{\rho=\rho_{0,k}=(\sigma_{0,k}, \vec{0})} &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Aus Gl. (7.15) folgt, dass die Kopplung $a_{k,1}$, der Symmetriebrechungsfaktor c und dass Minimum $\rho_{0,k}$ wie folgt verknüpft sind:

$$a_{k,1} = -\frac{c}{\sigma_{0,k}} = -\frac{c}{\sqrt{2\rho_{0,k}}}. \quad (7.17)$$

Bilden wir die Ableitung des Potentials nach t , so ergibt sich:

$$\partial_t U_k(\rho, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_t a_{k,n}}{n!} (\rho - \rho_{0,k})^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{(n-1)!} (\rho - \rho_{0,k})^{n-1} (\partial_t \rho_{0,k}). \quad (7.18)$$

Daraus wird ersichtlich, dass in die Flussgleichung der Kopplung $a_{k,n}$ der Fluss der Kopplung $a_{k,n+1}$ hineinwirkt, d.h. $\partial_t a_{k,n} = f(a_{k,n}, a_{k,n+1})$. Wenn wir die Entwicklung in Gl. (7.14) bei $N_{max} = 2$ abbrechen und den Grenzfall $T \rightarrow 0$ betrachten erhalten wir für die Flussgleichungen für den Ordnungsparameter $\rho_{0,k}$ und für die Kopplung λ_k :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{0,k} &= \frac{k^5 \lambda_k}{\frac{c}{2\sqrt{2}\rho_{0,k}^{3/2}} - \frac{\lambda_k}{3}} \left(\frac{N_c N_f h^2}{\lambda_k 3\pi^2 (k^2 + M_Q^2)^{3/2}} - \frac{N-1}{72\pi^2 (k^2 + M_\pi^2)^{3/2}} - \frac{1}{24\pi^2 (k^2 + M_\sigma^2)^{3/2}} \right), \\ \partial_t \lambda_k &= -\frac{3h^4 k^5 N_c N_f}{\pi^2 (k^2 + M_Q^2)^{5/2}} + \frac{(N-1)k^5 \lambda_k^2}{48\pi^2 (k^2 + M_\pi^2)^{5/2}} + \frac{k^5 \lambda_k^2}{16\pi^2 (k^2 + M_\sigma^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Analog wie beim $O(N)$ -Modell werden am UV-Cutoff Λ die Startparameter der Variablen $\rho_{0,k}$ und λ_k so festgelegt, dass sich bei $T = 0$ für $k \rightarrow 0$ die physikalischen Werte für die Pionenmasse und die Pionenzerfallskonstante ergeben. Die Startwerte für den Druck und alle weiteren Kopplungen $a_{k,n>2}$ werden im UV-Cutoff Λ gleich Null gesetzt. Die Werte für den UV- und IR-Cutoff sind gewählt worden wie in Kap. 6.

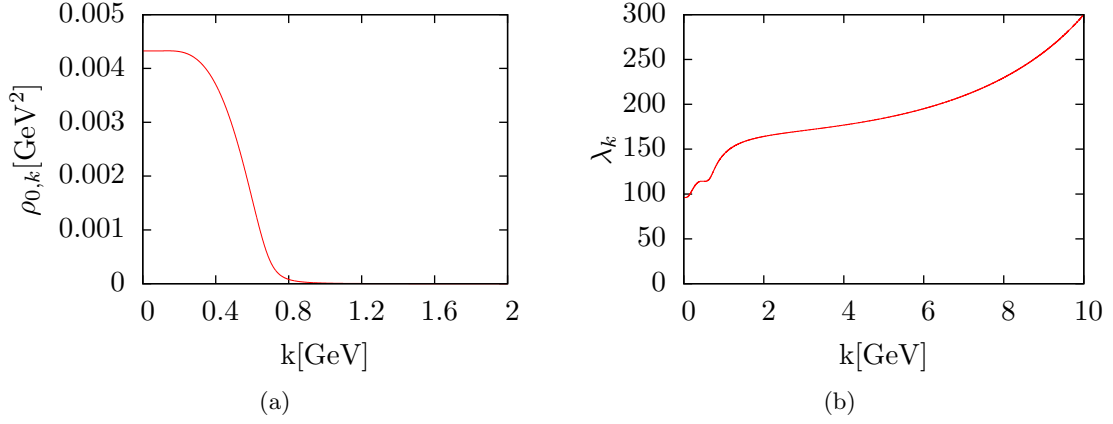


Abbildung 7.1: (a): Ordnungsparameter $\rho_{0,k}$ in Abhängigkeit der Skala bei $T = 0$, (b): Kopplung λ_k in Abhängigkeit von der Skala k bei $T = 0$.

Im UV-Cutoff Λ hat unser Gesamtpotential folgende Form:

$$U_{\text{UV}} = m_{\text{UV}}^2 \rho + \frac{\lambda_{\text{UV}}}{6} \rho^2 + c\sigma. \quad (7.20)$$

Wir starten im UV im symmetrischen Regime und zu fragen ist, wo das Minimum von U_{UV} liegt. Dazu schreiben wir U_{UV} zunächst in dimensionslose Größen um:

$$\tilde{U}_{\text{UV}} = \epsilon \rho + \frac{1}{6} \tilde{\lambda}_{\text{UV}} \rho^2 + c_R \sigma_R. \quad (7.21)$$

Die dimensionslosen Größen ergeben sich aus den dimensionsbehafteten folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{UV}} &= \frac{U_{\text{UV}}}{k^4}, \\ \tilde{\lambda}_{\text{UV}} &= \lambda_{\text{UV}}, \\ c_R &= \frac{c}{k^3}, \\ \sigma_R &= \sigma k^3, \\ \epsilon &= \frac{m_{\text{UV}}^2}{k^2}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Mit $\rho = \frac{1}{2} \sigma_R^2$ erhalten wir für das Minimum folgenden Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\partial \tilde{U}_{\text{UV}}}{\partial \sigma_R} = \epsilon \sigma_R + \frac{1}{6} \tilde{\lambda}_{\text{UV}} \sigma_R^3 + c_R \stackrel{!}{=} 0. \quad (7.23)$$

ϵ und $\tilde{\lambda}_{\text{UV}}$ sind nun so einzustellen, dass wir bei einem bestimmten expliziten Symmetriebrechungsfaktor, $c = c_{\text{phy}}$, für die Pionenzerfallskonstante $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ und für

$M_\pi[\text{MeV}]$	$T_p[\text{MeV}]$
1	157.8
2.5	158.4
5.6	159.5
12.5	162.0
28.0	166.9
62.3	174.1
138.2	186.8

 Tabelle 7.1: pseudokritische Temperatur T_p in Abhängigkeit der $M_\pi[T = 0]$.

die Pionenmasse $M_\pi = 138 \text{ MeV}$ erhalten. Der Symmetriebrechungsfaktor bestimmt die Größe der Pionenmasse. Die Lösung obiger Bestimmungsgleichung liefert den Startwert für $\rho_{0,k}$:

$$\rho_{0,k}|_{k=\Lambda} = \frac{1}{2}(\sigma_R \Lambda)^2. \quad (7.24)$$

Abb. 7.1 zeigt die Lösung des Ordnungsparameters $\rho_{0,k}$ und der Kopplung λ_k für den Grenzfall $T \rightarrow 0$ und einem Potential mit $N_{max} = 2$ in Abhängigkeit der Skala. Dabei wurden die Parameter so eingestellt, dass wir für die Pionenmasse einen Wert von 138 MeV und für die Pionzerfallskonstante einen Wert von 93 MeV erhalten. Wir sehen, dass bis zu einer bestimmten Skala, der Ordnungsparameter näherungsweise Null ist. Diejenige Skala ab der sich das ändert heißt Symmetriebrechungsskala $k = k_{SB}$. Wie man auch an der Kopplung sieht, macht sich der Übergang zum symmetrischen Regime auch bei der Kopplung bemerkbar. Im Unterschied zum $O(N)$ -Modell starten wir im symmetrischen Regime und erfahren bereits einen Regimewechsel bei $T = 0$. Im IR ist also die chirale Symmetrie gebrochen. Wenn wir die Temperatur einschalten, so stellt man fest, dass $\rho_{0,k}|_{k=kmin}$ kleiner wird: bis ab der kritischen Temperatur T_c die chirale Symmetrie wiederhergestellt ist. Jedoch stellen wir fest, dass es für Temperaturen oberhalb von T_c Skalenbereiche gibt in denen die chirale Symmetrie gebrochen bleibt. Diese Bereiche verschwinden allerdings ab $\tilde{T}_c \approx 178 \text{ MeV}$, so dass wir ab dieser Temperatur auf allen Skalen einen verschwindenden Wert für $\rho_{0,k}$ finden (Abb. 7.2a). Dieses Verhalten verschwindet allerdings, wenn wir den Ordnungsparameter für verschiedene Temperaturen bei großen Pionenmassen $M_\pi[T = 0]$ betrachten (Abb. 7.2b).

Die zweite „kritische Temperatur“ macht sich für kleine Pionenmassen $M_\pi[T = 0]$ durch einen Knick in den Bosonenmassen und durch ein scharfes Maximum im Druck bemerkbar, siehe Abb. 7.3a und 7.4. Für größer werdende Pionenmassen verschwindet der Knick und das Maximum ist weniger scharf ausgeprägt.

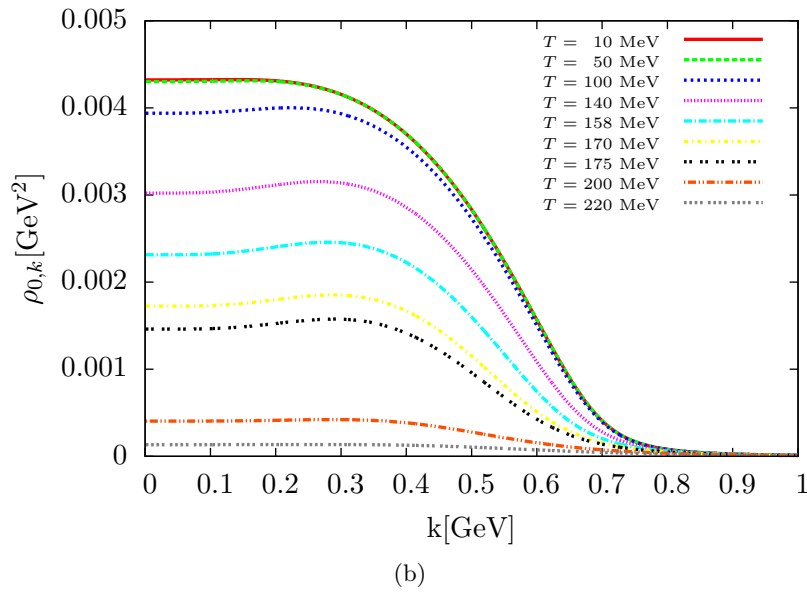
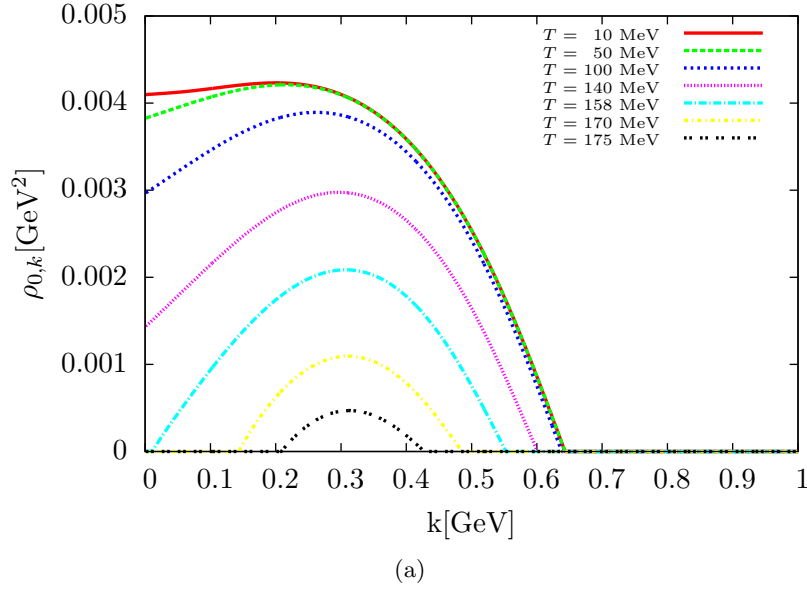


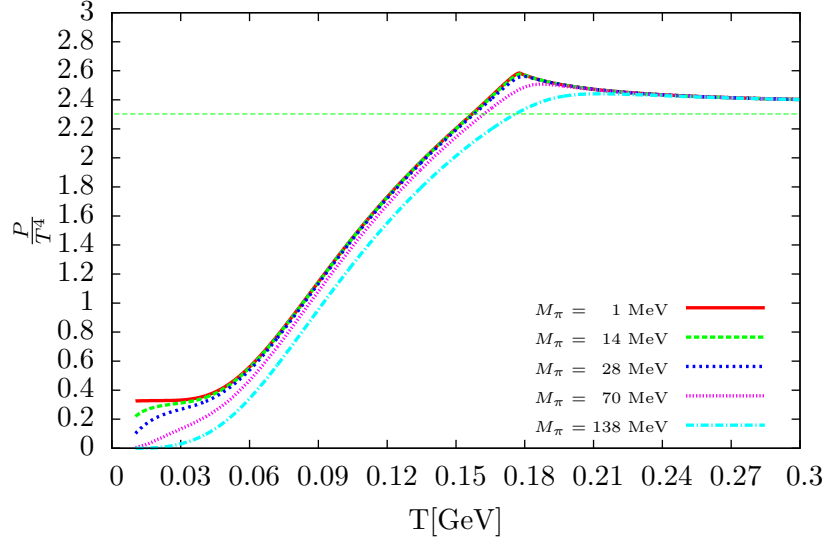
Abbildung 7.2: (a): Ordnungsparameter $\rho_{0,k}$ in Abhängigkeit der Skala für verschiedene Temperaturen, Symmetriebrechungsfaktor wurde so eingestellt, dass $M_\pi = 1$ MeV, (b): Ordnungsparameter $\rho_{0,k}$ in Abhängigkeit der Skala für verschiedene Temperaturen, Symmetriebrechungsfaktor wurde so eingestellt, dass $M_\pi = 138$ MeV.

Wie sich das System verhält, hängt entscheidend von der Größe der expliziten Symmetriebrechung ab: Je größer die explizite Symmetriebrechung wird, d.h. je größer die Masse der Pionen bei $T = 0$, um so weniger kann man von einem Phasenübergang zweiter Ordnung sprechen, bei dem der Ordnungsparameter bei $k = k_{\min}$ bei der kritischen Temperatur schlagartig auf Null fällt. Streng genommen kann man nur dann von einem Phasenübergang zweiter Ordnung reden, wenn $M_\pi(T = 0) \rightarrow 0$. In diesem Fall wird die σ -Suszeptibilität $\chi_\sigma = \frac{1}{M_\sigma^2}$ bei $T = T_c$ singulär. Bei endlicher Symmetriebrechung ist die kritische Temperatur definiert durch das Maximum von χ_σ . Für endliche Symmetriebrechung bezeichnet man die kritische Temperatur auch als pseudokritische Temperatur T_p . Tab. 6.1 gibt T_p für verschiedene Pionenmassen bei $T = 0$ an. Wird dann die explizite Symmetriebrechung immer größer, so hat man es mit einem Crossover-Übergang zu tun, bei dem der Ordnungsparameter sich asymptotisch der Null nähert bei Erhöhung der Temperatur (Abb. 7.3b). Ein analoges Verhalten beobachten wir für die Symmetriebrechungsskala k_{SB} : Während der Übergang zum symmetrischen Regime bei $M_\pi(T = 0) \rightarrow 0$ bei einer scharfen Skala stattfindet, so nähert sich das System beim Crossover-Übergang nur asymptotisch dem symmetrischen Regime, siehe Abb. 7.2b. Dass die pseudokritische Temperatur ansteigt mit ansteigender expliziter Symmetriebrechung liegt darin begründet, dass schwerere Teilchen weniger leicht anregbar sind als leichte. Daher findet der (Crossover)-Phasenübergang bei höheren Temperaturen statt.

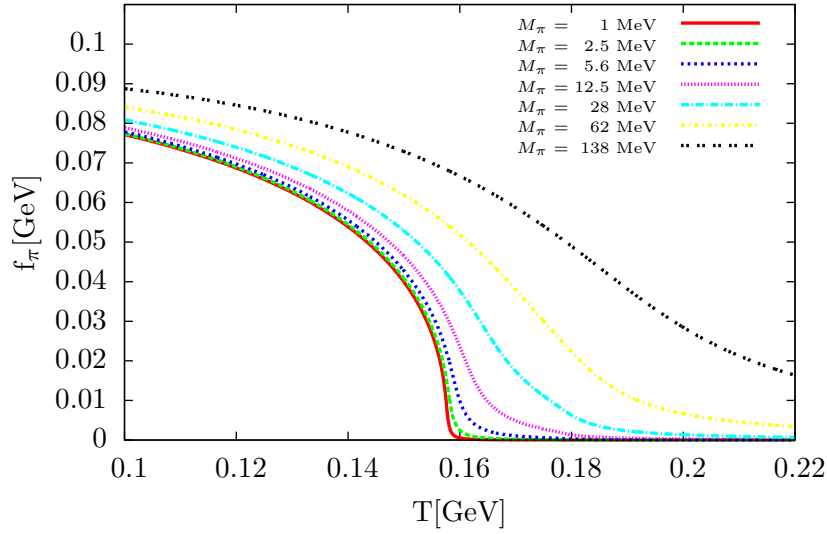
Die Werte für die Pionen- bzw. Sigma-Massen erhält man in dem man die entsprechenden Ausdrücke für die Massen an der Stelle $\rho = \rho_{0,k}$ auswertet:

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= \frac{-c}{\sqrt{2\rho_{0,k}}}, \\ M_\sigma^2 &= \frac{-c}{\sqrt{2\rho_{0,k}}} + \frac{2}{3}\lambda_k\rho_{0,k}, \\ M_Q^2 &= 2\rho_{0,k}h^2. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Ist die chirale Symmetrie gebrochen, so bekommen die Fermionen eine Masse und die Pionen werden (von der expliziten Symmetriebrechung abgesehen) masselos. Für $k < k_{\text{SB}}$ wird der Einfluss der Fermionen, auf Grund zunehmender Fermionenmasse zunehmend kleiner, so dass die Dynamik des Flusses zunehmend, ab $k \ll T$ vollständig durch die Bosonen bestimmt ist. Das hat seine Ursache in der nicht vorhandenen Matsubara-Nullmode der Fermionen. Dieses Verhalten stellt man auch beim Druck fest (Abb. 7.3a). Für $k \ll T$ dominiert der bosonische Sektor und für kleine Pionenmasse beträgt $\frac{P}{T^4} \approx 0.33$ für $T \rightarrow 0$, analog wie bei $O(N)$ -Modell; steigt dagegen die Pionenmasse, auf Grund zunehmender expliziter Symmetriebrechung verschwindet $\frac{P}{T^4}$ für sehr kleine Temperaturen.



(a)



(b)

Abbildung 7.3: (a): Druck $\frac{P}{T^4}$ ausgewertet bei $k = k_{\min}$ in Abhängigkeit der Temperatur für verschiedene Pionenmassen $M_\pi[T = 0]$, (b): Pionenzerfallskonstante f_π ausgewertet bei $k = k_{\min}$ in Abhängigkeit der Temperatur für verschiedene Pionenmassen $M_\pi[T = 0]$.

Mit zunehmender Temperatur steigt der Druck, auf Grund der kleiner werdenden Fermionenmasse bis dieser bei der „zweiten“ kritischen Temperatur \tilde{T}_c bei $c \rightarrow 0$ ein Maximalwert von $\frac{P}{T^4} \approx 2.585$ erreicht und sich dann unabhängig von der Größe der expliziten Symmetriebrechung asymptotisch dem fermionischen Stefan-Boltzmann-Limes nähert. Dabei liegen die Druckkurven größerer expliziter Symmetriebrechung unter denen mit kleinerer. Je stärker die chirale Symmetrie gebrochen ist, um so massiver die Teilchen und um so kleiner deren Druckbeitrag bei gleicher Temperatur.

Für $T > T_c$ ist die Thermodynamik des Druckes tendenziell ausschließlich durch die Fermionen bestimmt, da der Druck der bosonischen Freiheitsgrade für $T \rightarrow \infty$ verschwindet. Für den fermionischen Anteil des Druckes erhalten wir:

$$-\partial_t P = \frac{4k^5 N_c N_f}{6\pi^2 \sqrt{k^2 + M_Q^2}} \frac{1}{1 + e^{\frac{\sqrt{k^2 + M_Q^2}}{T}}} \quad (7.26)$$

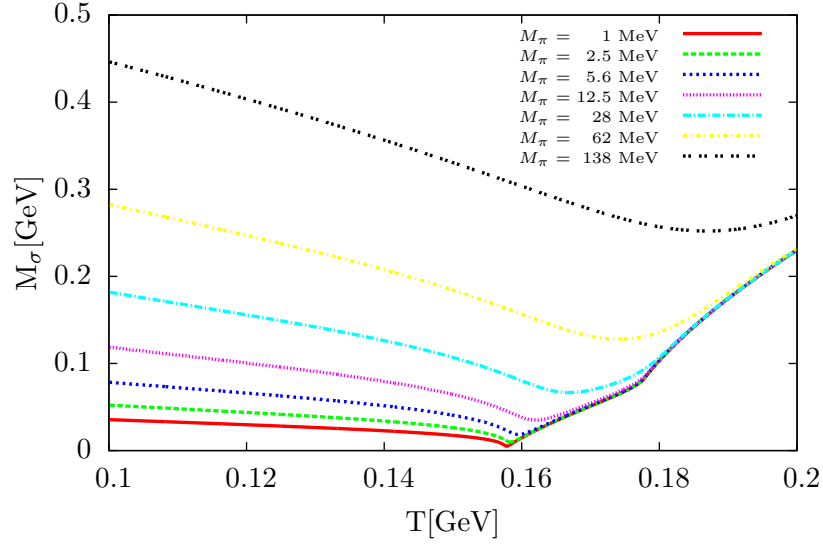
Für $M_Q = 0$ erhalten wir den Druck von $4N_c N_f = 24$ wechselwirkungsfreien Fermionen:

$$\frac{P}{T^4} = 4N_c N_f \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} \approx 2.30291 \quad (7.27)$$

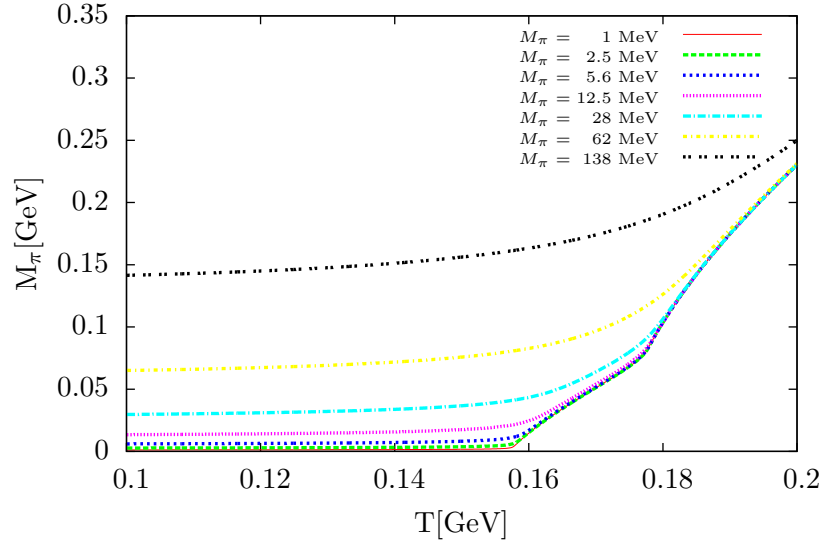
Bei $T = T_c$ haben wir für $c \rightarrow 0$ vier masselose Bosonen und $4N_f N_c = 24$ masselose Fermionen. Wäre beim Phasenübergang die Wechselwirkung zwischen den Teilchen schwach oder nicht vorhanden und wäre die explizite Symmetriebrechung tatsächlich Null, so wäre für $\frac{P}{T^4}$ bei $T = T_c$ das Stefan-Boltzmann-Limes des Gesamtsystems zu erwarten:

$$\frac{P}{T^4} = 4N_c N_f \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} + 4 \frac{\pi^2}{90} \approx 2.7412. \quad (7.28)$$

Da die Druckkurve bei $T = 300$ MeV erst den Wert ≈ 2.4 erreicht, bedeutet dass die bosonischen Freiheitsgrade noch signifikant zum thermodynamischen Druck beitragen.



(a)



(b)

Abbildung 7.4: (a): Sigmamasse M_σ ausgewertet bei $k = k_{\min}$ in Abhängigkeit der Temperatur für verschiedene Pionenmassen $M_\pi[T = 0]$, (b): Pionenmasse M_π ausgewertet bei $k = k_{\min}$ in Abhängigkeit der Temperatur für verschiedene Pionenmassen $M_\pi[T = 0]$.

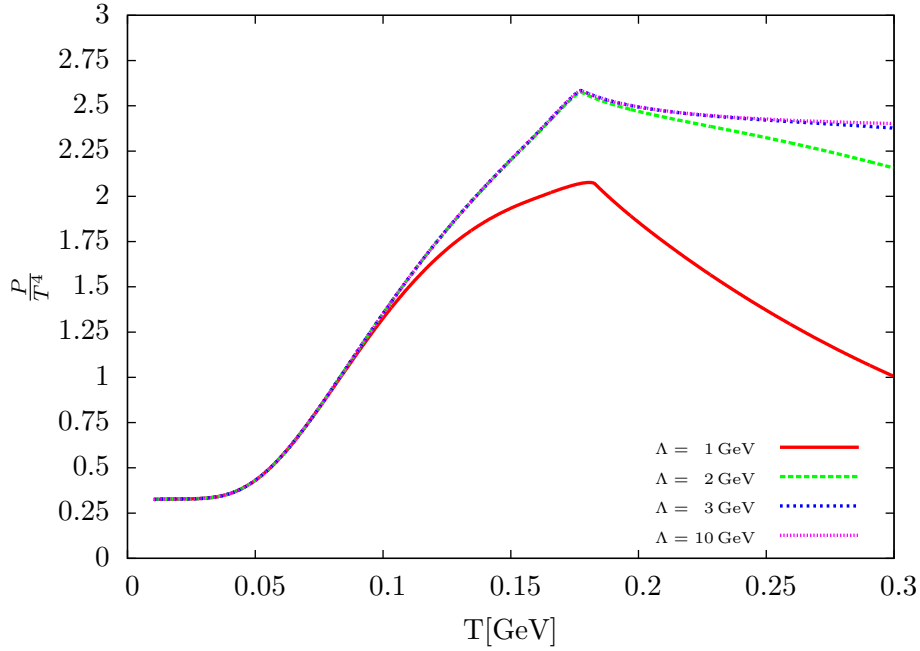


Abbildung 7.5: $\frac{P}{T^4}$ in Abhängigkeit von T für verschiedene Λ bei $M_\pi(T=0) \approx 1$ MeV.

7.3 Cutoff-Effekte

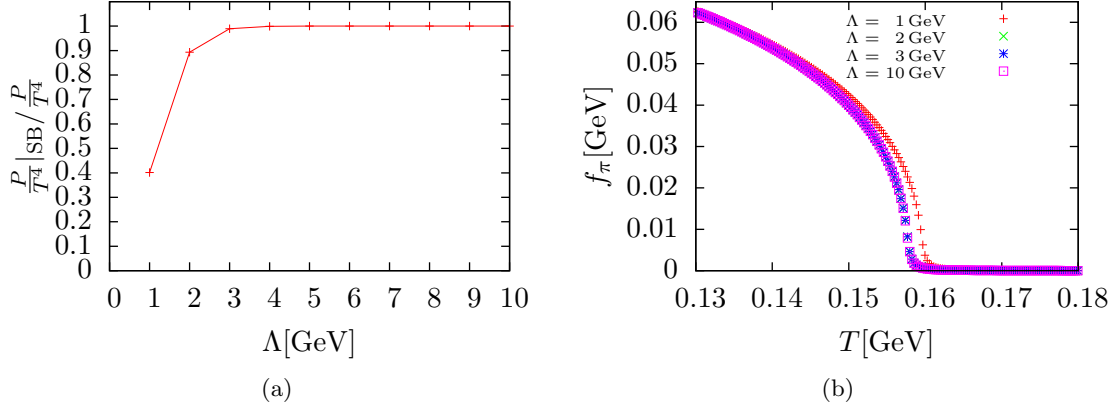
In diesem Abschnitt soll begründet werden, warum der UV-Cutoff Λ derart gewählt werden sollte, dass $\frac{2\pi T}{\Lambda} \ll 1$ gelte; darüber hinaus wird gezeigt, welche Auswirkungen es hat, wenn diese Forderung nicht eingelöst wird. Grundsätzlich hängen die Ergebnisse von der Wahl des UV-Cutoffs Λ ab. Jedoch ist der Einfluss des UV-Cutoffs zu vernachlässigen, solange die Temperatur klein bleibt im Vergleich zu Λ .

Je höher die Temperaturen werden, um so mehr rückt das Intervall der imaginärer Zeitachse zusammen und die Teilchen spüren zunehmend den Rand des Zeitintervalls.

Abb. 7.5 zeigt den Druck bei $M_\pi = 1$ MeV für verschiedene Λ . Für $\Lambda = 3$ GeV und $\Lambda = 10$ GeV ist nur ein kleiner Unterschied bei großen Temperaturen zu erkennen. Abweichungen machen sich bemerkbar ab dem Bereich in dem gilt: $\frac{2\pi T}{\Lambda} \approx 1$. Wählt man einen noch kleineren Cutoff so erscheint der Druck ab Temperaturen, für die gilt $\frac{2\pi T}{\Lambda} \geq 1$, deutlich kleiner als im Falle größeren Cutoffs². Unsere Teilchen haben in diesem Bereich Impulse, deren Größe in der Größenordnung derer liegt, die durch den UV-Cutoff Λ abgeschnitten werden sollen.

Was für den Druck als Ganzes gilt, gilt für den Stefan-Boltzmann-Limes des Druckes

²Vergleiche [46].



Abbildungung 7.6: (a) Cutoff-Effekt für den Stefan-Boltzmann-Limes, (b) Cutoff-Effekt für den Ordnungsparameter f_π und $M_\pi = 1$ MeV.

gleichermaßen. Integriert man Gl. 7.26 von Λ nach $k \rightarrow 0$ für $M_Q = 0$, so lautet der volle Ausdruck für $\frac{P}{T^4}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{T^4} &= 4N_c N_f \frac{7\pi^2}{8 \cdot 90} \\
 &\quad + \frac{2N_c N_f}{3\pi^2 T^4} \left(\frac{\Lambda^4}{4} - T\Lambda^3 Li_1(z) - 3T^2 \Lambda^2 Li_2(z) + 6T^3 \Lambda Li_3(z) - 6T^4 Li_4(z) \right) \\
 &= \frac{P}{T^4} \Big|_{\text{SB}} + \frac{P(\Lambda, T)}{T^4}.
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Wobei $z = -e^{\Lambda/T}$ und $Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$ den Polylogarithmus der Ordnung n angibt. Zusätzlich zum Stefan-Boltzmann-Limes bekommt man noch einen Cutoff-abhängigen Term. In Abb. 7.6a ist das Verhältnis von $\frac{P}{T^4}$ aus Gl. (7.29) zu $\frac{P}{T^4} \Big|_{\text{SB}}$ für $T = 300$ MeV in Abhängigkeit des UV-Cutoffs geplottet. Wie zu erwarten nimmt der Term $P(\Lambda, T)$ keinen erkennbaren Einfluss auf den Stefan-Boltzmann-Limes, sofern der UV-Cutoff groß genug gewählt ist. Ist der Cutoff zu klein gewählt, so hat dieser beispielsweise auch Einfluss auf den Verlauf des Ordnungsparameters, siehe Abb. 7.6b. Bei $\Lambda = 1$ gilt $\frac{2\pi T_p}{\Lambda} \approx 1$ und man stellt fest, dass sich die pseudokritische Temperatur um etwa 2 MeV unterscheidet im Vergleich zu $\Lambda = 10$ GeV. Ein falscher Wert für T_p verringert schlussendlich die Qualität der kritischen Exponenten und der Scaling-Analyse. Daher die Wichtigkeit der Bedingung $\frac{2\pi T}{\Lambda} \ll 1$.

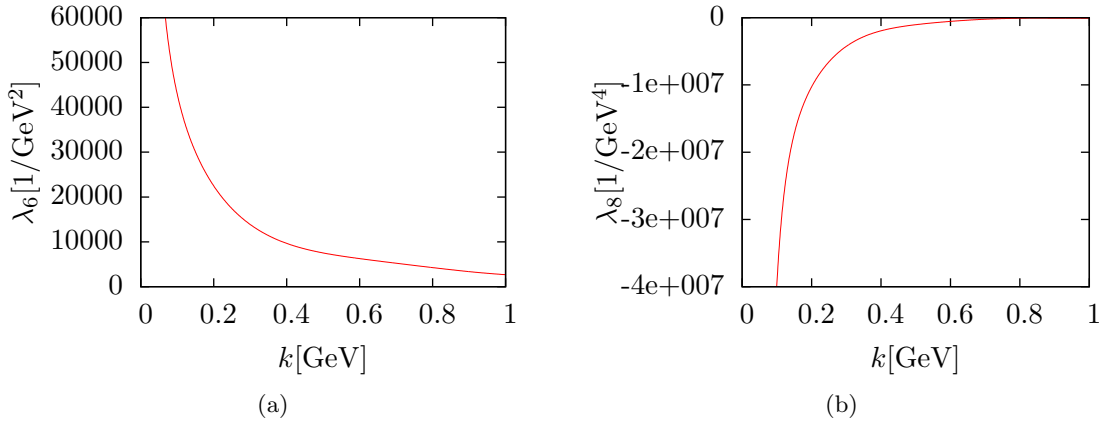


Abbildung 7.7: (a) λ_6 in Abhängigkeit von k für $T = 0$ und $M_\pi \approx 0$, (b) λ_8 in Abhängigkeit von k für $T = 0$ und $M_\pi \approx 0$.

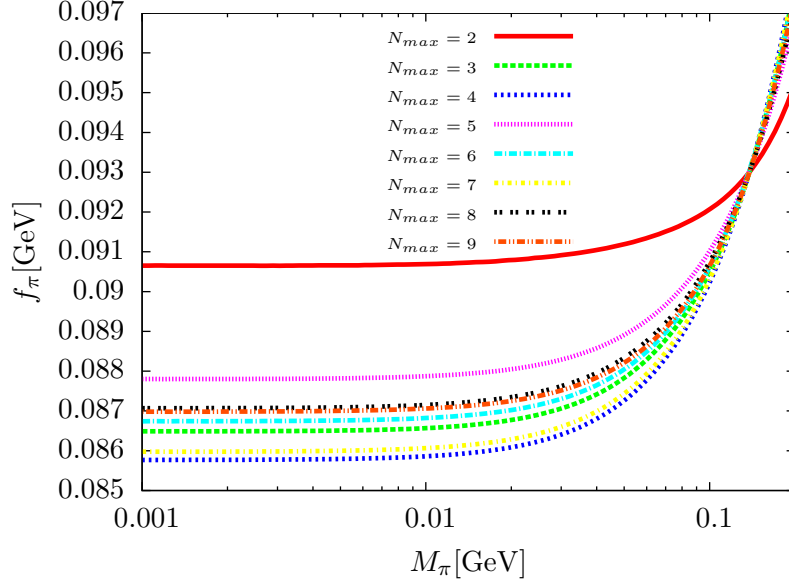
7.4 Trunkierungs-Effekte

Bisher betrachteten wir ein bosonisches Potential mit $N_{max} = 2$ bei Gl. (7.14). Zweifellos hindert uns nichts daran noch weitere Ordnungen $\propto \lambda_6 \phi^6, \propto \lambda_8 \phi^8, \dots$ hinzuzunehmen. Hier soll untersucht werden, ob und wie sich die Ergebnisse von den obigen unterscheiden, also z.B. die Lage der (pseudo)kritischen Temperatur bei festgehaltenen Werten für die Pionerzerfallskonstante und Pionenmasse für $k \rightarrow 0$ und $T \rightarrow 0$. Es stellt sich damit die Frage, ob, wenn man N_{max} weiter erhöht, ein Konvergenzverhalten zu erwarten ist, d.h. ob die ausgerechneten Größen sich merklich unterscheiden, wenn man noch höhere Ordnungen in der Taylorentwicklung mitnimmt.

Die RHS der Flussgleichung wird bekanntlich in eine Taylorreihe entwickelt. Auf Grund der Struktur der RHS erwarten wir für die Flussgleichungen der höheren Kopplungen alternierende Vorzeichen (Abb. 7.7). Während die ϕ^4 -Kopplung $\propto k^{4-D}$ in $D = 4$ dimensionslos ist, tragen die höheren Kopplungen eine Dimension $\propto k^{8-D-2N_{max}}$, d.h. die Kopplung weisen folgende Proportionalitäten auf: $a_{k,3} = \lambda_6 \propto \frac{1}{k^2}, a_{k,4} = \lambda_8 \propto \frac{1}{k^4}$ usw. Die Auswertung der Flussgleichungen am IR-Cutoff wird also mit größer werdender Ordnung N_{max} , auf Grund des Verhaltens der Kopplungen $\lambda_6, \lambda_8, \dots$ für $k \rightarrow 0$ zunehmend schwierig; vor allem gilt dies für die temperaturabhängige Form. Es zeigt sich, dass es zweckmäßig ist für höhere Ordnungen die Flussgleichungen in dimensionslose Größen umzuschreiben.

Für jede Trunkierung muss ein unterschiedlicher Wert für ϵ in Gl. (7.23) ($\tilde{\lambda}_{UV}$ und c_{phy} bleiben gleich), eingestellt werden, wenn für $T = 0$ im IR-Cutoff die gleichen Werte für f_π und M_π errechnet werden sollen.

Abb. 7.8 zeigt uns eine starke Abhängigkeit des Ordnungsparameters als Funktion der Pionenmasse bei $T = 0$ von der gewählten Trunkierung. Die Graphen für $N_{max} = 8$ und



Abbildungung 7.8: f_π in Abhängigkeit von $M_\pi[T=0]$ für verschiedene Trunkierungen. Der Übersichtlichkeit halber ist die M_π -Achse in logarithmischer Darstellung. Bei $M_\pi = 138$ MeV und $f_\pi = 93$ MeV schneiden sich alle Kurven auf Grund der entsprechenden Einstellung für die Randbedingungen an die Renormierungsgruppenflussgleichungen.

$N_{max} = 9$ unterscheiden sich kaum und ergeben für $M_\pi \rightarrow 0$ einen Wert von ≈ 87 MeV. Abb. 7.9b zeigt die Werte für f_π für $M_\pi[T=0] \rightarrow 0$. Man sieht, dass bei Erhöhung der Trunkierungsordnung die Alternationen abnehmen. Das gleiche gilt auch für die anderen Größen. Wir stellen also Konvergenzverhalten fest.

Im folgendem ist es allerdings weder notwendig noch zweckmäßig bis zur Ordnung $\propto \phi^{18}$ zu entwickeln. Das Scaling im unendlichen und endlichen Volumen werden wir betrachten bei der Trunkierung $\propto \phi^8$. Abgesehen davon wächst die Rechenzeit für die numerische Lösung der temperaturabhängigen Flussgleichung stark mit den Erhöhung der Trunkierungsordnung. Die erforderliche Rechenzeit wächst noch weiter an, wenn wir Effekte bei endlichen Volumen studieren.

Sämtliche Größen bei gleichen IR-Werten für f_π und M_π und Temperatur haben eine Abhängigkeit von der Trunkierung. In Tab. 7.2 sind beispielsweise die pseudokritischen Temperaturen für die jeweils angegebenen Pionenmassen für $N_{max} = 3$ und $N_{max} = 4$ dargestellt. Eine Hinzunahme höherer Kopplungen führt allerdings nicht nur zu einer Änderung betrachteter Größen in quantitativer Hinsicht, sondern diverse Kurvenverläufe ändern ihr Aussehen auch qualitativ. Wir schauen uns dazu die Masse des Sigma-Mesons

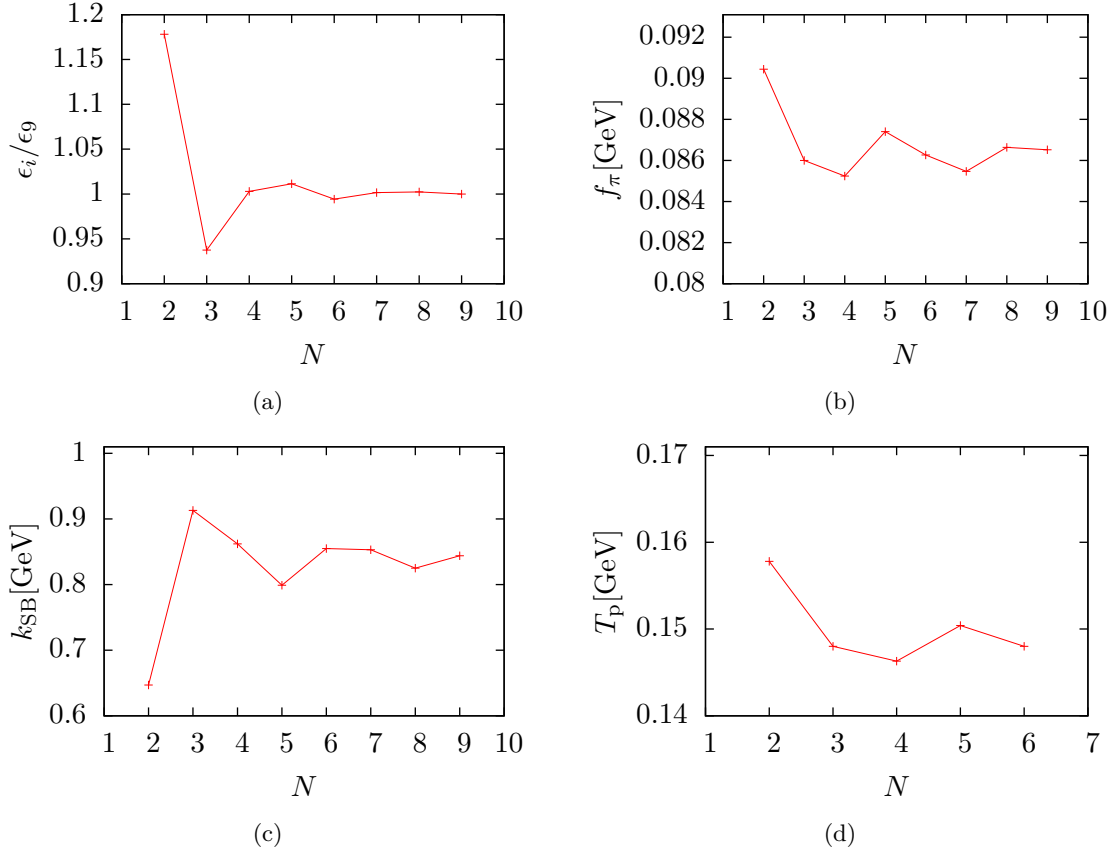


Abbildung 7.9: (a) ϵ geteilt durch ϵ für $N_{max} = 9$ als Funktion von N_{max} . (b) f_π für $M_\pi \rightarrow 0$ als Funktion von N_{max} . (c) k_{SB} für $T = 0$ und $M_\pi \rightarrow 0$ als Funktion von N_{max} . (d) T_p für $M_\pi[T = 0] = 1$ MeV als Funktion von N_{max} . Wir sehen, dass für alle Größen das alternierende Verhalten mit zunehmender Trunkierungsordnung abnimmt. Ein äquivalenten Ergebnis wurde in [47] gefunden.

in Abhängigkeit der Temperatur für $N_{max} = 2$ bis $N_{max} = 4$ an, siehe Abb.7.10a³. In Kap. 7.2 haben wir gezeigt, dass bei oberhalb von T_c Skalenbereiche existieren in denen die chirale Symmetrie gebrochen bleibt, siehe Abb.7.2a. Dieses Phänomen beobachten wir auch bei höheren Trunkierungen. Allerdings reicht für $N_{max} = 3$ dieser Bereich bis Temperaturen von etwa $\tilde{T}_c \approx 213$ MeV und für $N_{max} = 4$ liegt \tilde{T}_c bei ≈ 201 MeV. Bei $N_{max} = 2$ sieht man bei den Sigmamassen für kleine $M_\pi[T = 0]$ an der Stelle \tilde{T}_c einen charakteristischen Knick, der bei $N_{max} = 3$ kaum noch zu erkennen und bei

³Analog für M_π .

M_π [MeV]	T_p [MeV]	M_π [MeV]	T_p [MeV]
1	148.0	1	146.3
2.6	148.9	2.6	147.1
5.7	151.0	5.8	148.7
12.8	155.0	12.9	152.0
28.6	163.1	28.7	159.0
63.4	179.3	63.6	173.0
138.2	208.7	138.2	201.6

(a)
(b)

Tabelle 7.2: (a) T_p in Abhängigkeit der $M_\pi[T = 0]$ für $N_{max} = 3$, (b) T_p in Abhängigkeit der $M_\pi[T = 0]$ für $N_{max} = 4$.

$N_{max} = 4$ gänzlich verschwunden ist. Die Existenz von Skalenbereichen mit gebrochener chiraler Symmetrie oberhalb der kritischen Temperatur macht sich ab $N_{max} = 4$ in der Temperaturabhängigkeit der Bosonenmassen nicht mehr bemerkbar.

Unter Hinzunahme höherer Ordnungen ist das scharfe Maximum des Drucks $\frac{P}{T^4}$, an der Stelle \tilde{T}_c weniger scharf ausgeprägt. (Abb. 7.10b). Da \tilde{T}_c sich ändert, verschiebt sich in Folge dessen das Maximum des Drucks.

Um den leicht unterschiedlichen Druckverlauf für die verschiedenen Trunkierungen zu verstehen, ist es zweckmäßig sich den Druck und die Bosonen- und Quarkmassen für $M_\pi = 138$ MeV und für $f_\pi = 93$ MeV anzuschauen. Betrachten wir dazu die Abb. 7.10c-f. Der Druck ist umso größer je kleiner die Massen der Teilchen sind. In allen Trunkierungen unterscheidet sich die Quarkmasse für $T > T_p$ kaum. Der unterschiedliche Kurvenverlauf des Druckes ist dort also vorwiegend aus der unterschiedlichen Abhängigkeit der Bosonemassen in diesem Bereich zu erklären. Die Trunkierung $N_{max} = 2$ hat für gleiche Temperaturen in jenem Bereich die größte Masse; daher liegt ihre Druckkurve unter der für $N_{max} = 3$ und $N_{max} = 4$. Für $T < T_p$ wird das Verhalten der Druckfunktion vorwiegend durch die Quarkmassen bestimmt. Der Druck für $N_{max} = 3$ liegt über den von $N_{max} = 2$ und $N_{max} = 4$, da diese die kleinste Quarkmasse bei gleichem T/T_p hat; die Bosonen tragen zur Differenz der Kurven nicht bei, da die σ -Massen ohnehin sehr groß und die Pionenmassen für alle Trunkierungen gleich groß sind.

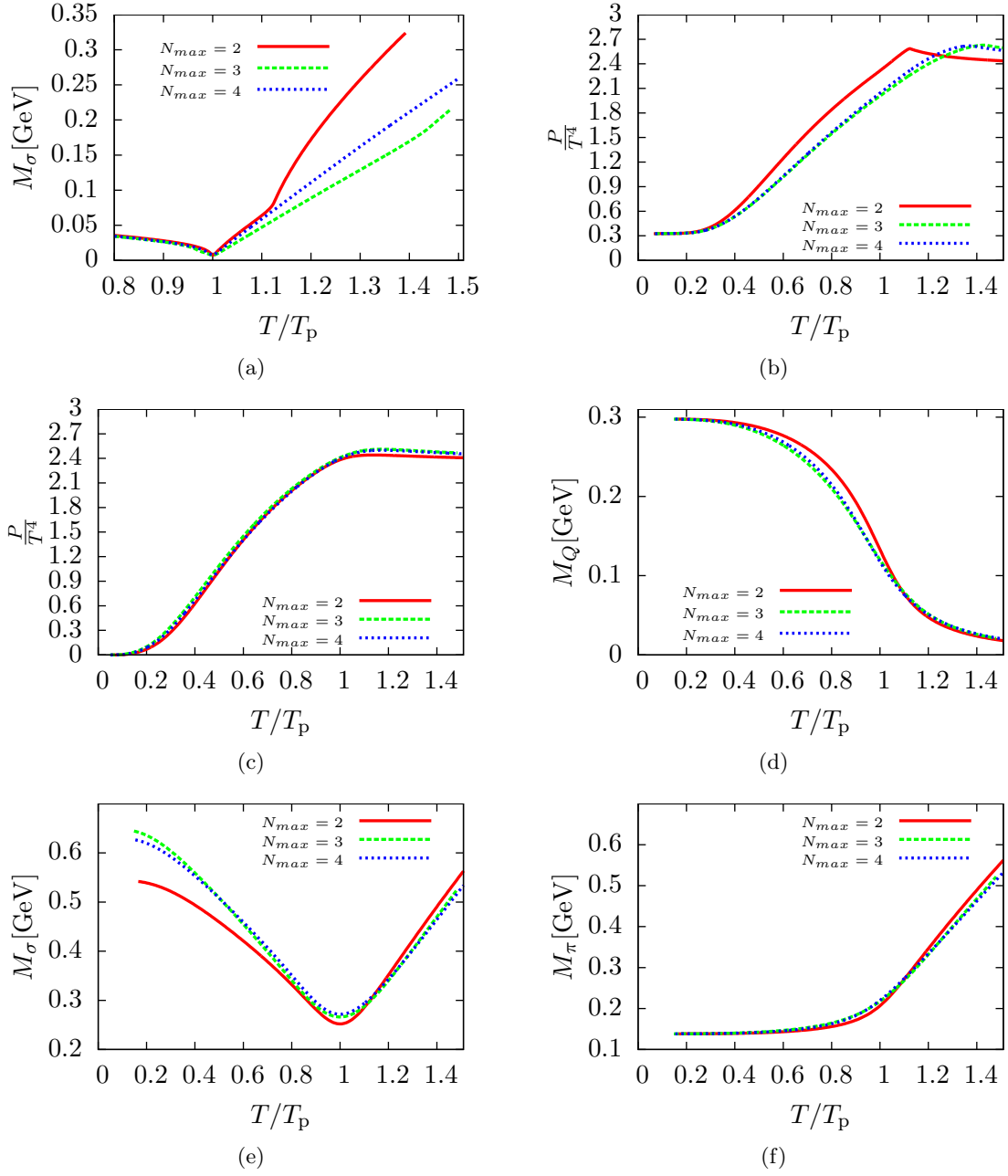


Abbildung 7.10: (a): M_σ für $M_\pi \approx 1$ MeV für die Ordnungen $N_{max} = 2$ bis $N_{max} = 4$,
 (b): $\frac{P}{T^4}$ für $M_\pi \approx 1$ MeV für die Ordnungen $N_{max} = 2$ bis $N_{max} = 4$.
 (c)-(f): $\frac{P}{T^4}$, M_Q , M_σ und M_π für $M_\pi = 138$ MeV für die Ordnungen $N_{max} = 2$ bis $N_{max} = 4$.

7.5 Scaling in unendlichem Volumen

Um unnötige Rechenzeit einzusparen, vor allem für den Fall endlicher Volumina, setzten wir im Folgendem den Cutoff Λ herunter auf $\Lambda = 3 \text{ GeV}$. Wie oben gezeigt, genügt dieser Cutoff der Forderung $\frac{2\pi T}{\Lambda} \ll 1$.

Für den folgenden Abschnitt ist die genaue Kenntnis der kritischen Temperatur notwendig. Von einer kritischen Temperatur kann erst dann die Rede sein, wenn die explizite Symmetriebrechung tatsächlich gleich Null gesetzt ist. Dazu verwenden wir die bekannte [27] universelle Peak-Position der reskalierten Sigma-Suszeptibilität für $c \rightarrow 0$:

$$z_p = \frac{T_p - T_c}{T_0} \left(\frac{H_0}{c} \right)^{1/(\beta\delta)} = 1.3155. \quad (7.30)$$

Daraus folgt für T_p ⁴:

$$T_p(c) - T_c(c=0) = \frac{T_0 z_p}{H_0^{1/\beta\delta}} \cdot c^{1/(\beta\delta)} \propto \sqrt{c}. \quad (7.31)$$

Wir fitten unsere Ergebnisse für $T_p(c)$ (Abb. 7.11a) an eine Funktion der Form von Gl. (7.31) und es folgt für $T_c(c=0)$ aus der Extrapolation $c \rightarrow 0$:

$$T_c(c=0) = 0.144949346731961 \text{ GeV}. \quad (7.32)$$

Mit diesem Wert für die kritische Temperatur bestimmten wir den kritischen Exponenten δ durch $f_\pi[T = T_c(c \rightarrow 0)] = ac^\delta$ (Abb. 7.11b). Für die Normierungskonste H_0 ergibt sich damit:

$$H_0 = e^{-\log(a)\delta} = 346.37722832663883 \text{ GeV}^3. \quad (7.33)$$

Mit dem aus dem Fit bekannten Vorfaktor, dessen numerischer Werte gleich ist dem Vorfaktor aus Gl. (7.31), und mit dem jetzt bekannten Wert für H_0 läßt sich die zweite Normierungskonstante T_0 bestimmen:

$$T_0 = 23.862066412513776 \text{ GeV}. \quad (7.34)$$

Für Modelle mit der Flavor-Zahl $N_f = 2$ gilt für den Zusammenhang zwischen T_p und M_π folgende Relation [49]:

$$T_p - T_{c=0} \propto M_\pi^{2/\beta\delta} = aM_\pi^{2/\beta\delta}. \quad (7.35)$$

Dass wir zwischen T_p und M_π einen linearen Zusammenhang beobachten ist also eine Konsequenz der numerischen Werte der kritischen Exponenten. Aus dem Fit von (7.35) und dem bereits bestimmten Exponenten δ läßt sich damit der kritische Exponent β bestimmen (Abb. 7.11c). ⁵

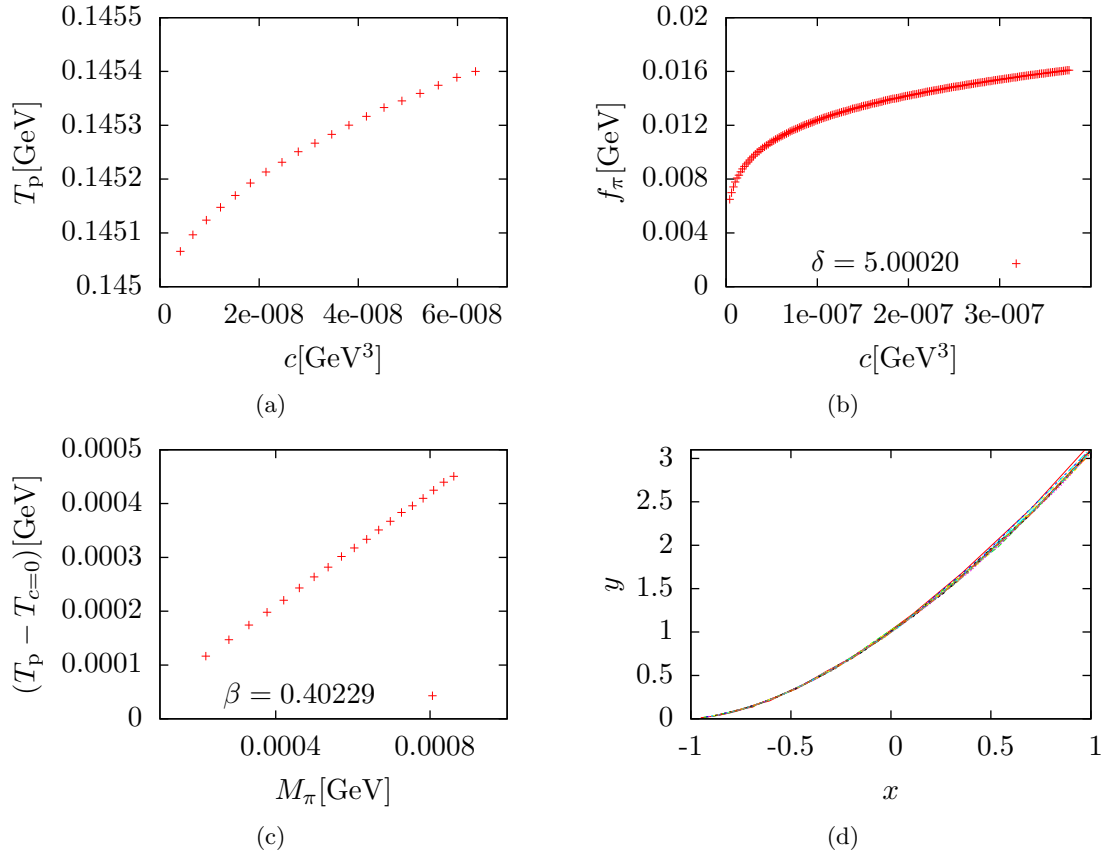


Abbildung 7.11: (a) Peak-Temperatur T_p als Funktion des externen Feldes, (b) Pionenzerfallskonstante bei $T = T_c$ als Funktion des externen Feldes, (c) $T_p - T_{c=0}$ als Funktion von $M_\pi[T = 0]$, (d) y in Abhängigkeit von x , siehe Kap. 5.2. Es gelten die Randbedingungen: $y(-1) = 0$ und $y(0) = 1$.

Die Normierungskonstanten benötigen wir für die reduzierten Größen: $h = c/H_0$ und $t = (T - T_{c=0})/T_0$, die Verwendung finden in unserer Scaling-Variable z .

Für die Scaling-Analyse sei an dieser Stelle noch ausdrücklich betont wie außerordentlich wichtig die möglichst genaue Bestimmung der Größen H_0 , T_0 , und $T_{c=0}$ ist.

⁴Vergleiche [48].

⁵Streng genommen werden die beiden Exponenten hier nicht bestimmt, da wir diese in Gl. (7.30) als bekannt voraussetzen und zur Bestimmung von $T_{c=0}$ verwenden. Es wird verwendet $\beta = 0.4022$ und $\delta = 5.00$ aus [28] bzw. [50]. Demnach ist es eher eine Konsistenzprüfung. Was für unsere Zielsetzung schließlich interessiert sind die Normierungskonstanten und die kritische Temperatur.

Wir definieren die Variable:

$$z = \frac{t}{h^{1/\beta\delta}}, \quad (7.36)$$

und bestimmen die Scaling-Funktionen:

$$\begin{aligned} f_M(z) &= \frac{M}{h^{1/\beta\delta}} \equiv \frac{f_\pi(z)}{h^{1/\beta\delta}}, \\ f_\chi(z) &= H_0 h^{1-1/\delta} \chi \equiv H_0 h^{1-1/\delta} \chi_\sigma. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Die Resultate zeigen die Abb. 7.12 und 7.13. Für kleine Symmetriebrechungen (c zwischen $\approx 6 \cdot 10^{-9} \text{ GeV}^3$ und $\approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ GeV}^3$) stimmen die 18 Kurven gut überein, wird dagegen die Symmetriebrechung größer so treten deutliche Abweichungen auf. Wie zu erwarten, gelten die Scaling-Funktionen ohne Scaling-Korrekturen nur für kleine Symmetriebrechungen (Abb. 7.14a-b).

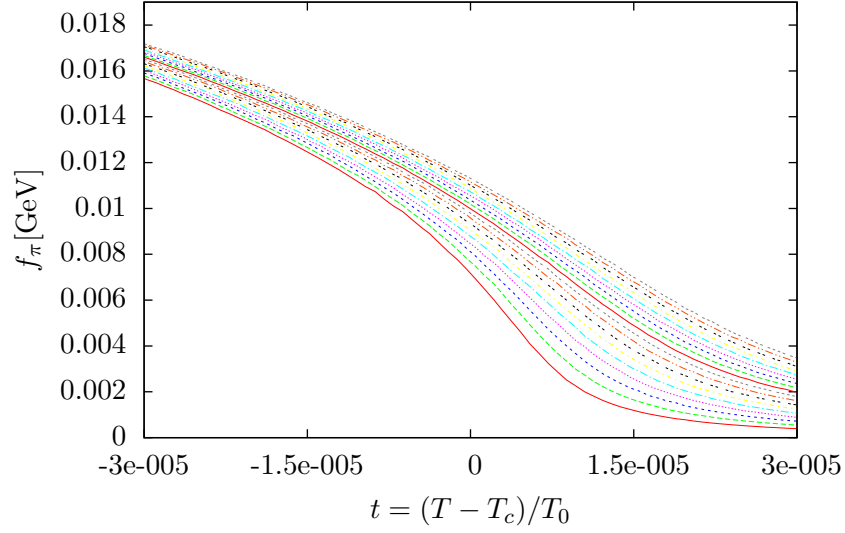
Ein weitere Demonstration von Scaling Verhalten liefert die Griffiths-Entwicklung. Wir plotten y über x für denselben Symmetriebrechungsbereich wie oben. Die 18 Kurven liegen Kurven gut aufeinander, siehe Abb. (7.11d). Die Randbedingung der Giffiths-Funktion $y(x)$ sind erfüllt. Für kleine x wählen wir den folgenden phänomenologischen Ansatz:

$$y(x) = a(1+x)^\tau. \quad (7.38)$$

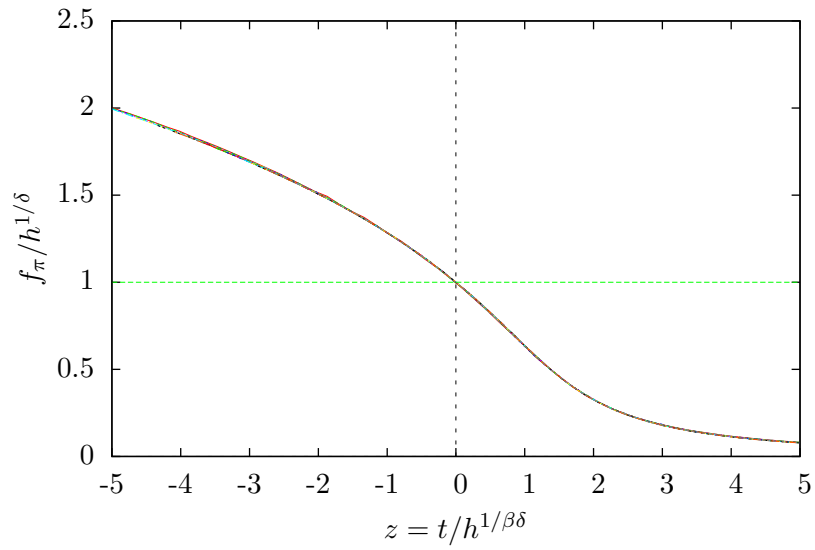
Dabei ist τ ein freier Parameter und es ergibt sich für jeden Graphen $a \approx 1$ und $\tau \approx 1.6$. Damit ist der freie Parameter mit dem kritischen Exponenten γ identisch⁶. Wir führen denselben Fit für große x durch und erhalten für γ bei allen 18 Kurven etwa denselben Wert von 1.633. Damit ist die Näherung (5.19) gerechtfertigt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, dass das Scaling der Pionzerfallskonstante $f_\pi/h^{1/\beta\delta}$ am besten in der Umgebung der kritischen Temperatur $T_{c=0}$ bzw. bei der Suszeptibilität $\chi_\sigma H_0 h^{1-1/\delta}$ um $z \approx z_p$ herum oder bei der Griffiths-Entwicklung für kleine x erkennbar ist.

⁶ γ nimmt Werte zwischen 1.58 und 1.62 an. Nach der Exponentenrelation $\gamma = \beta(\delta - 1)$ [28] ist für den Exponenten γ folgender Wert zu erwarten: $\gamma = 1.6088$. Näherungsweise stimmen unsere Ergebnisse für den Exponenten γ mit dem aus der Relation errechnetem überein.

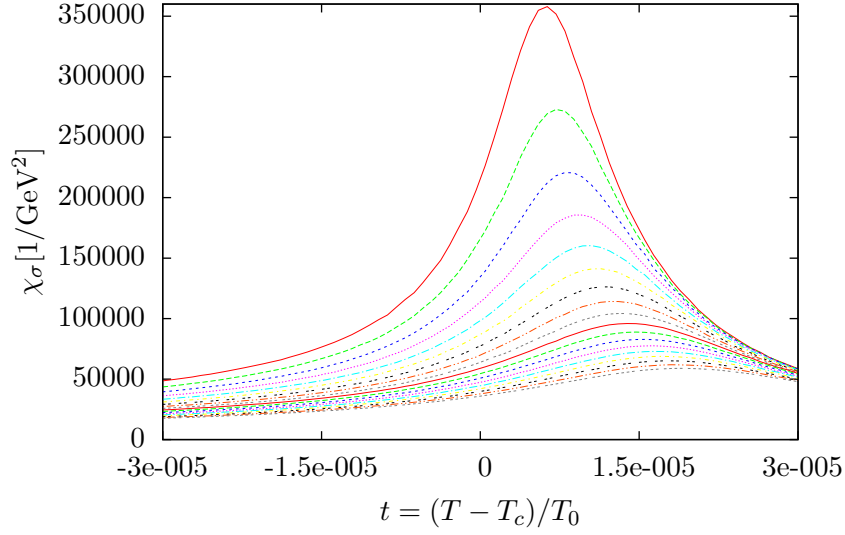


(a)

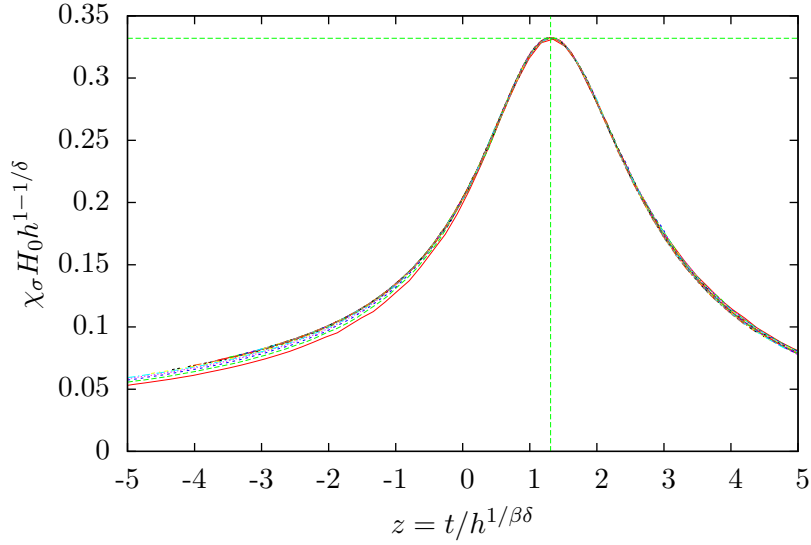


(b)

Abbildung 7.12: (a) Pionenzerfallskonstante als Funktion von t , $M_\pi[T = 0]$ liegt zwischen 0.2 MeV und 0.9 MeV; (b) Reskalierte Pionenzerfallskonstante als Funktion von z , $M_\pi[T = 0]$ liegt zwischen 0.2 MeV und 0.9 MeV.



(a)



(b)

Abbildung 7.13: (a) Sigma-Suszeptibilität als Funktion von t , $M_\pi[T=0]$ liegt zwischen 0.2 MeV und 0.9 MeV; (b) Reskalierte Sigma-Suszeptibilität als Funktion von z , $M_\pi[T=0]$ liegt zwischen 0.2 MeV und 0.9 MeV. Das Maximum $\chi_{\text{res,max}} = 0.33$ liegt bei $z = 1.31$.

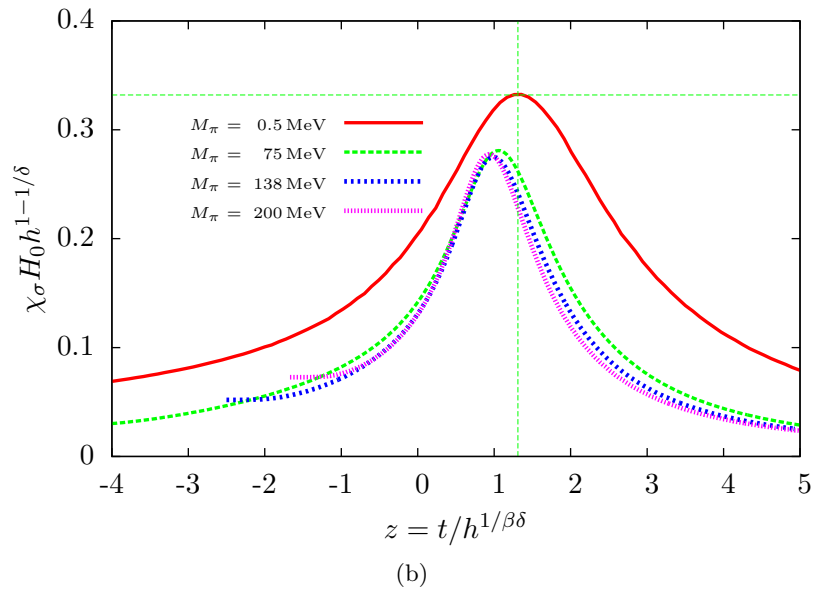
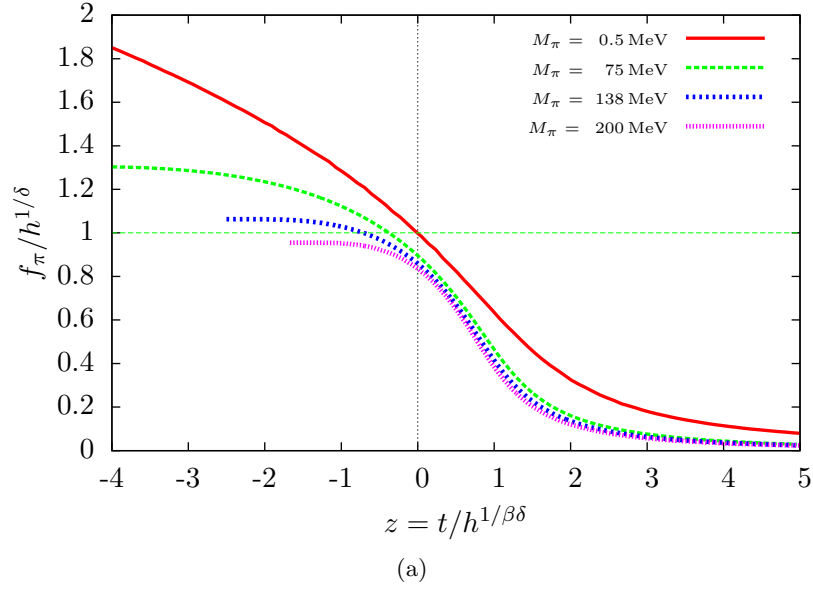


Abbildung 7.14: (a)-(b) Reskalierte Pionenzerfallskonstante und Suszeptibilität als Funktion von z für große Pionenmassen und zum Vergleich jeweils ein Plot mit $M_\pi \rightarrow 0$.

8 Quark-Meson-Modell in endlichem Volumen

8.1 Flussgleichung für das Quark-Meson-Modell in endlichem Volumen

In Kap. 7.1 wurde die Flussgleichung für das Quark-Meson-Modell im unendlichen Volumen ausgerechnet:

$$\partial_t \Gamma_k = \beta V \frac{2k^2 T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{(N-1)}{\omega_n^2 + k^2 + M_\pi^2} + \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + M_\sigma^2} - \frac{4N_c N_f}{\nu_n^2 + k^2 + M_Q^2} \right\} \Theta(k^2 - p^2). \quad (8.1)$$

Wenn wir das Quark-Meson-Modell in einem endlichen Volumen studieren wollen,¹, so bedeutet dass wir jedes Impulsintegral in eine Summe über alle Impulsmoden überführen.

$$\int \frac{d^3 p}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty}. \quad (8.2)$$

Die Impulsmoden sind diskret und müssen bestimmte, durch das endliche Volumen bedingte, Randbedingungen genügen. Damit wir mit Gittersimulationen der QCD unsere Ergebnisse vergleichen wollen, wählen wir hier periodische Randbedingungen für Bosonen und Fermionen gleichermaßen. Somit ergibt sich für p^2 :

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2. \quad (8.3)$$

Damit ergibt sich für die Flussgleichung im endlichen Volumen:

$$\partial_t \Gamma_k = \beta V \frac{k^5}{2} \left\{ (N-1) \frac{\coth \frac{\sqrt{k^2 + M_\pi^2}}{2T}}{\sqrt{k^2 + M_\pi^2}} + \frac{\coth \frac{\sqrt{k^2 + M_\sigma^2}}{2T}}{\sqrt{k^2 + M_\sigma^2}} - 4N_f N_c \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{k^2 + M_Q^2}}{2T} \right)}{\sqrt{k^2 + M_Q^2}} \right\} \mathfrak{B}, \quad (8.4)$$

¹Obwohl L^3 das räumliche Volumen ist und L die Kantenlänge, so bezeichnen wir im Folgenden der Einfachheit halber auch L als Volumen.

wobei die Funktion \mathfrak{B} wie folgt definiert ist:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{(kL)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(4\pi^2 \vec{n}^2 - (kL)^2). \quad (8.5)$$

Die Summe zählt die diskrete Anzahl der Moden die in einer Kugel mit dem Radius $k \cdot L$ enthalten sind.

Im Unterschied zum Fall mit unendlichen Volumen darf der Symmetriebrechungsfaktor nicht identisch gleich Null sein. Setzt man formal² $c = 0$ so bekommt man z.B. für den Beitrag der Pionen der rechten Seite der Flussgleichung für $\rho_{0,k}$ folgende Terme:

$$\partial_t \rho_{0,k} \propto \dots + \frac{\coth[k/2T]}{kL^3} \lambda_k + \frac{\coth[k/2T]^2}{TL^3} \lambda_k. \quad (8.6)$$

Diese beiden Ausdrücke divergieren, wenn man $k \rightarrow 0$ betrachtet. Das bedeutet, dass der Fluss $\rho_{0,k}$ für $k \rightarrow 0$ nicht ausfriert, sondern einen steilen Anstieg bekommt. Das hat zufolge, dass für $k \rightarrow 0$ der Ordnungsparameter $\rho_{0,k}$ für alle Temperaturen verschwindet. Wir verbleiben also im symmetrischen Regime und haben damit keinen Phasenübergang. Im unendlichen Volumen konvergieren die entsprechenden Beiträge der Pionen für $k \rightarrow 0$ und der Fluss friert aus.

Im Kap. 6 bestimmten wird einen Ausdruck für den Druck:

$$\partial_t P = -T \frac{\partial}{\partial V} \Gamma_k|_{\rho=\rho_{0,k}} = -U_k|_{\rho=\rho_{0,k}}. \quad (8.7)$$

Diese Gleichung gilt allerdings nur, sofern U_k selbst nicht vom Volumen abhängt. Es muss also stattdessen bestimmt werden:

$$\partial_t P = -\frac{\partial}{\partial V} V \mathfrak{B}(kV^{1/3}) k^5 f(M_i^2(V^{1/3}), k, T), \quad i \in (\pi, \sigma, Q). \quad (8.8)$$

$f(M_i^2, k, T)$ ist dabei der Ausdruck in den großen Klammern von Gl. (8.4) abzüglich des $T = 0$ -Anteils, ausgewertet bei $\rho = \rho_{0,k}$. Es ergibt sich für den Druck im endlichen

²Formal deswegen, weil wir streng genommen im Falle von $c = 0$ einen anderen Potentialansatz verwenden müssten, d.h. einen doppelten Potentialansatz wie im $O(N)$ -Modell; dass wir das hier unterlassen, ändert aber nichts an der Sache.

Volumen:

$$\begin{aligned}
 \partial_t P &= -k^5 f(M_i^2(V^{1/3}), k, T) \left(\mathfrak{B}(kV^{1/3}) + V \frac{\partial \mathfrak{B}(kV^{1/3})}{\partial V} \right) \\
 &- V \mathfrak{B}(kV^{1/3}) k^5 \frac{\partial}{\partial V} f(M_i^2(V^{1/3}), k, T) \\
 &\stackrel{\frac{\partial}{\partial V} = \frac{1}{3L^2} \frac{\partial}{\partial L}}{=} - \sum_{\vec{n}=-\infty, \vec{n} \neq 0}^{\infty} k^5 f(M_i^2(L), k, T) \frac{2}{3} \frac{1}{kL} \delta((kL)^2 - 4\pi^2 \vec{n}^2) \\
 &- \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} \frac{k^5 L}{3} \mathfrak{B}(kL) \frac{\partial}{\partial L} f(M_i^2(L), k, T) \\
 &\equiv \partial_t p_1 + \partial_t p_2.
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

$\partial_t p_1$ kann sofort integriert werden:

$$p_1 = \sum_{\vec{n}=-\infty, \vec{n} \neq 0}^{\infty} \frac{1}{3L^5} (2\pi \vec{n})^2 f(M_i^2(L), k = 2\pi \vec{n}/L, T). \tag{8.10}$$

Bei der Summation ist darauf zu achten, dass $\frac{2\pi|\vec{n}|}{L} < \Lambda$ gilt. Die Nullmode ist bei der Summation herausgenommen, da diese keinen Beitrag leistet. Um das zu zeigen betrachten wir \mathfrak{B} für $kL \ll 1$:

$$\mathfrak{B} \approx \frac{1}{(kL)^3}. \tag{8.11}$$

Für $kL \ll 1$ also für kleine Volumina wird \mathfrak{B} volumenunabhängig und somit trägt der p_1 -Term nichts zum Druck bei. Der Druck vereinfacht sich damit zu:

$$\partial_t P = \partial_t p_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{k}{L} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial L}. \tag{8.12}$$

Für den Fall, dass zusätzlich noch sämtliche Teilchen masselos sind, verschwindet der Druck P für $kL \ll 1$, da $f(M_i^2(L) = 0, k, T)$ volumenunabhängig ist.

Der Druck p_2

$$\partial_t p_2 = - \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} \frac{k^5 L}{3} \mathfrak{B}(kL) \left(\frac{\partial f}{\partial M_\pi} \frac{\partial M_\pi}{\partial L} + \frac{\partial f}{\partial M_\sigma} \frac{\partial M_\sigma}{\partial L} + \frac{\partial f}{\partial M_Q} \frac{\partial M_Q}{\partial L} \right). \tag{8.13}$$

wird numerisch bestimmt. $\partial_t p_2$ liefert also Beiträge für kleine Volumina, während der Hauptbeitrag für den Druck für große Volumina $kL \gg 1$ durch $\partial_t p_1$ bestimmt ist, da für große Volumina die Volumenabhängigkeit der Massen vernachlässigt werden kann.

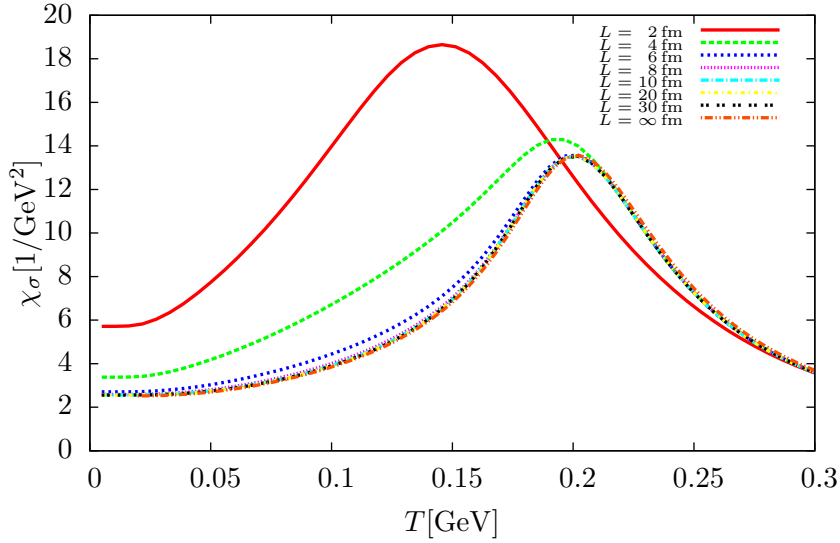


Abbildung 8.1: χ_σ in Abhängigkeit von T für verschiedene Volumina und für $L \rightarrow \infty$. Bei allen Kurven gilt: $M_\pi[T = 0] = 138$ MeV. Sichtbare Abweichungen vom unendlichen Volumen gibt es erst für Kurven ab $L \leq 6$ fm. Man sieht dass das Maximum der Suszeptibilität größer wird und zu kleineren Temperaturen verschoben wird.

8.2 Vergleich zwischen endlichem und unendlichem Volumen

Die Flussgleichung für das unendliche Volumen erhalten wir wieder, wenn wir den Fall $(kL) \rightarrow \infty$ betrachten³. Um das zu zeigen, verwenden wir die Poisson-Summenformel, die wie folgt lautet:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int dx' e^{2\pi i k x'} f(x'). \quad (8.14)$$

Der Form nach handelt es sich hier um eine Fouriertransformation. Der Grenzprozess $kL \rightarrow \infty$ entspricht dem „letzten“ Glied von \mathfrak{B} , Gl. (8.5). Fouriertransformiert man \mathfrak{B} ,

³Zur Notation ist anzumerken, dass $L = \infty$ die Lösung der Flussgleichung in unendlichem Volumen bezeichnet. $L \rightarrow \infty$ bezeichnet die Lösung der Flussgleichungen in endlichem Volumen, für derart große Volumina, dass kein erkennbarer Unterschied zu den Ergebnissen für $L = \infty$ vorliegt, siehe die Grenzfallbetrachtungen (8.25) in Kap. 8.4.

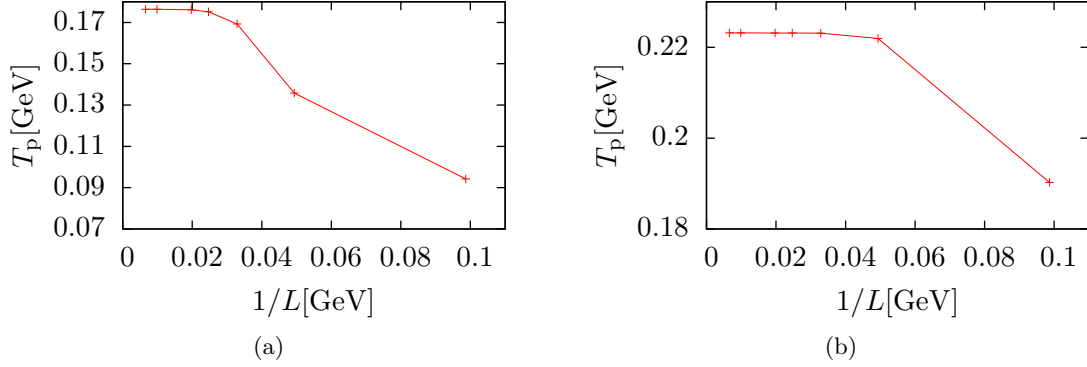


Abbildung 8.2: (a) T_p für verschiedene Volumina bei $M_\pi[T=0] = 75$ MeV, (b) T_p für verschiedene Volumina bei $M_\pi[T=0] = 200$ MeV.

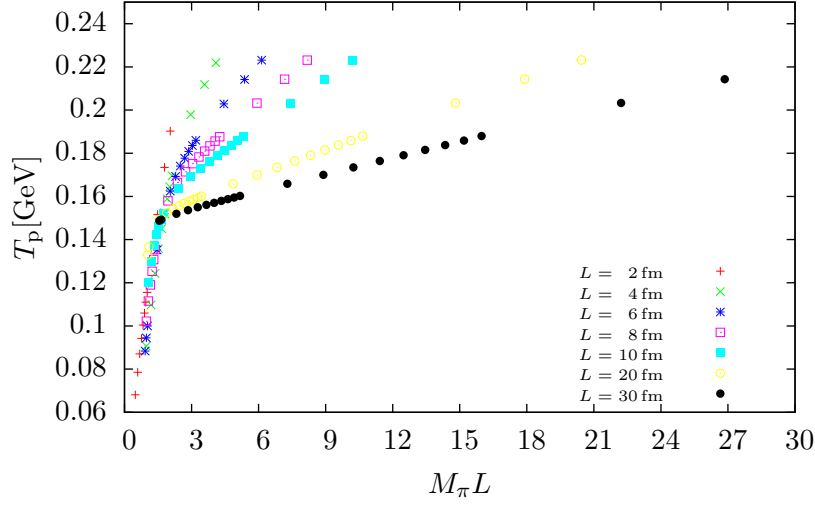
$L[\text{fm}]$	$M_\pi = 200$ MeV	$M_\pi = 138$ MeV	$M_\pi = 75$ MeV
2	190.26	145.66	94.21
4	221.91	193.59	135.84
6	223.10	199.78	169.26
8	223.14	200.26	175.15
10	223.14	200.31	176.09
20	223.16	200.33	176.41
30	223.16	200.33	176.41

Tabelle 8.1: $T_p[\text{MeV}]$ als Funktion von L für unterschiedliche Werte von $M_\pi[T=0]$.

so entspricht das letzte Glied dem ersten ($\vec{k} = 0$) im Bildraum.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(kL)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(4\pi^2 \vec{n}^2 - (kL)^2) &\stackrel{kL \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{(kL)^3} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \int d^3x e^{2\pi i \vec{k} \cdot \vec{x}} \Theta\left(1 - \frac{4\pi^2 \vec{x}^2}{(kL)^2}\right) \\
 &\stackrel{x'_i = \frac{2\pi x_i}{kL}}{=} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x' \Theta(1 - \vec{x}'^2) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{r \rightarrow \infty} dr 4\pi r^2 \Theta(1 - r^2) \\
 &= \frac{1}{6\pi^2}.
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

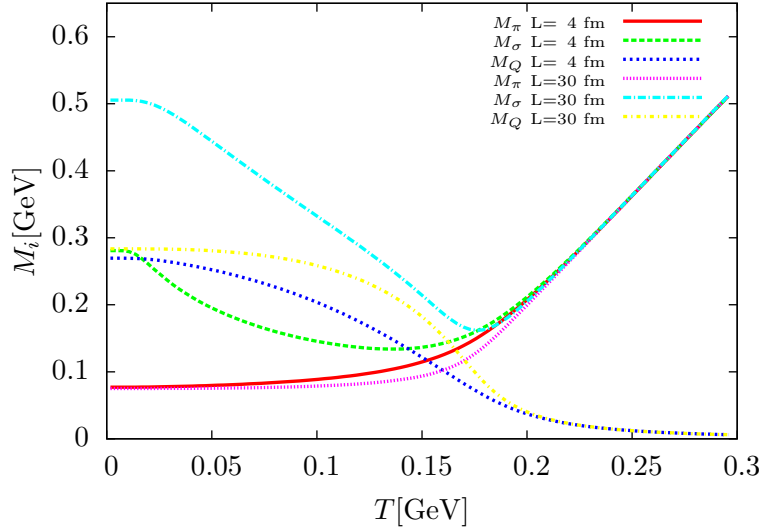
Wenn wir $\mathfrak{B} \rightarrow \frac{1}{6\pi^2}$ in Gl. (8.4) einsetzen, so erhalten wir wieder die Flussgleichung (7.14).


 Abbildung 8.3: T_p in Abhängigkeit von $M_\pi L$ für verschiedene Volumina.

Im endlichen Volumen hatten wir, abgesehen von der Impulsskala k , zwei Skalen, die die Dynamik der skalenabhängigen Größen bestimmten: die Temperatur T und den expliziten Symmetriebrechungsfaktor c , d.h. $M_\pi[T = 0]$. Auf Grund des endlichen Volumens bekommen wir eine weitere Skala L hinzu: das Verhalten der Größen wird jetzt entscheidend geprägt durch $M_\pi[T = 0] \cdot L$.

Abweichungen im Fall unendlichen Volumens erwartet man immer dann, wenn die Volumenabmessungen in die Größenordnung der Korrelationslänge der Wechselwirkung kommen. Das endliche Volumen L mit der Dimension $1/\text{GeV}$ wirkt wie eine zusätzliche Temperatur. Bei gleichen Temperaturen verhält sich die Dynamik so, als würde eine gegebene Temperatur bei kleinerem Volumen einer größeren entsprechen, d.h. eine Volumenverkleinerung wirkt effektiv wie eine Temperaturerhöhung. Verkleinert man das Volumen bei festgehaltenem $M_\pi[T = 0]$, dann findet der Phasenübergang bereits bei tieferen Temperaturen statt, d.h. $T_p \propto 1/L$, siehe (Abb. 8.2 und Tab. 8.1). Dabei sind die endlichen Volumeneffekte bei festem L um so größer, je kleiner $M_\pi[T = 0]$ eingestellt ist, denn je kleiner die explizite Symmetriebrechung ist, um so größer ist die Korrelationslänge der Wechselwirkungen bei gleicher Temperatur und um so eher bekommen die Teilchen das endliche Volumen zu spüren. Die pseudokritische Temperatur T_p ist also um so kleiner, je kleiner das dazugehörige $M_\pi[T = 0]L$ ist (Abb. 8.3). Allerdings wenn $M_\pi[T = 0]L \ll 1$ gilt, so stellen wir fest, dass ein Phasenübergang nicht mehr stattfindet. Das System verbleibt dann für alle betrachteten Temperaturen im symmetrischen Regime. Eine pseudokritische Temperatur existiert dann nicht und die zum entsprechenden Wert von $M_\pi L$ zugehörige Suszeptibilität χ_σ besitzt keinen Peak.

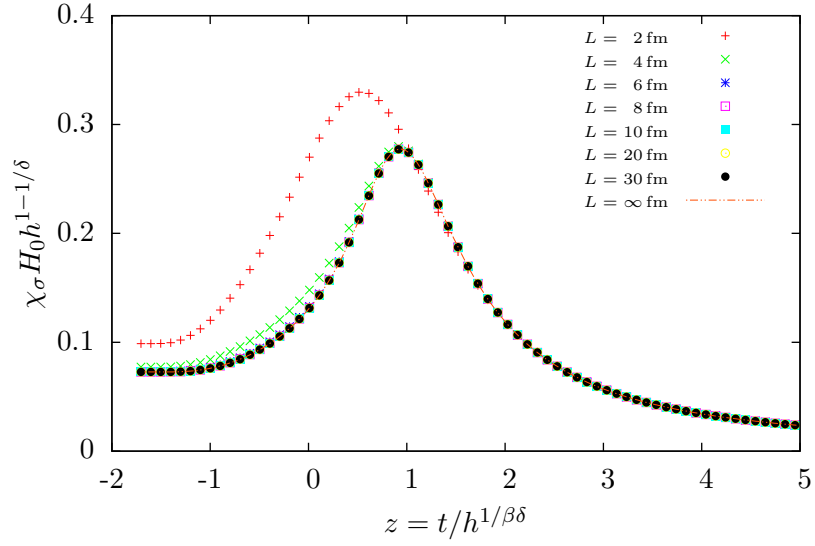
Betrachtet man die Quarkmassen bei gegebenem $M_\pi[T = 0]$, so wird die Quarkmasse



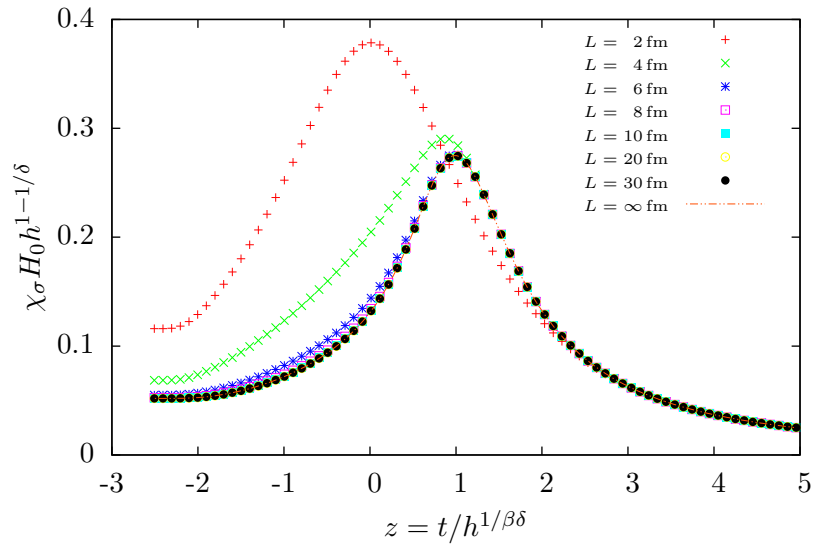
Abbildungung 8.4: M_π , M_σ , M_Q für $L = 30$ fm und $L = 4$ fm für jeweils $M_\pi[T = 0] = 75$ MeV.

kleiner bei gleicher Temperatur, wenn das Volumen verkleinert wird, da eine Volumenverkleinerung effektiv einer Temperaturerhöhung entspricht. Analog ist es beim σ -Meson. Die Pionenmasse verhält sich umgekehrt: diese ist bei gleicher Temperatur größer für kleinere Volumina: Die Pionen werden in der symmetrischen Phase massiv und da diese bei kleineren Volumina bei kleineren Temperaturen eintritt, so ist die Pionenmasse für kleinere Volumina bei gleicher Temperatur größer als bei größeren Volumina (Abb. 8.4).

Wir betrachten als nächstes die Scaling-Funktion $f_\chi = \chi_\sigma H_0 h^{1-1/\delta}$ für die Suszeptibilität χ_σ für verschiedene Volumina und Pionenmassen $M_\pi[T = 0]$. Da wir es hier mit größeren Pionenmassen zu tun haben, liegt das Maximum der Suszeptibilitäten, anders als in Abb. 7.13b, nicht bei $z = z_p = 1.31$ mit $\chi_{\text{res,max}} = 0.33$. Der Grund liegt darin begründet, dass die Scaling-Funktion f_χ ohne Korrekturterme nur Geltung hat für kleine Pionenmassen. Für $M_\pi L \gg 1$ sind die Ergebnisse mit dem für unendliches Volumen identisch. In Abb. (8.5a-c) wird das Maximum größer und verschiebt sich in Richtung kleinerer z , und das um so mehr, je kleiner das betrachtete $M_\pi[T = 0]L$ ist. Wird $M_\pi[T = 0]L$ noch kleiner, so verschwindet der Peak, siehe Abb. 8.5d. Existiert kein Peak mehr, so findet kein Phasenübergang mehr statt und das System verbleibt im symmetrischen Regime.



(a)



(b)

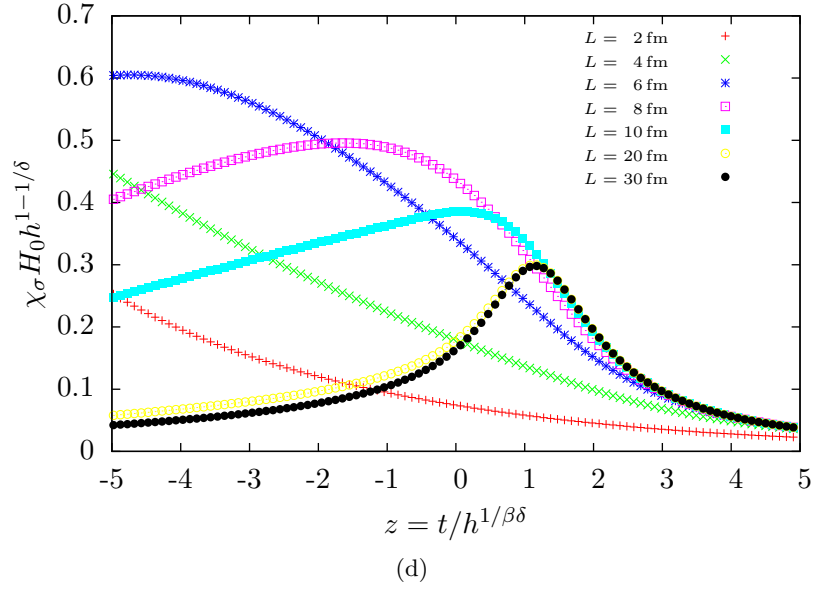
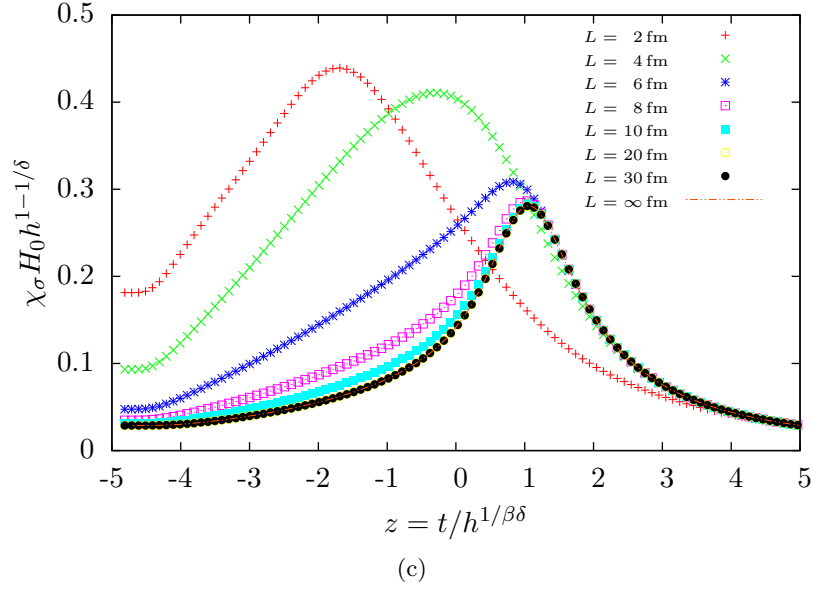
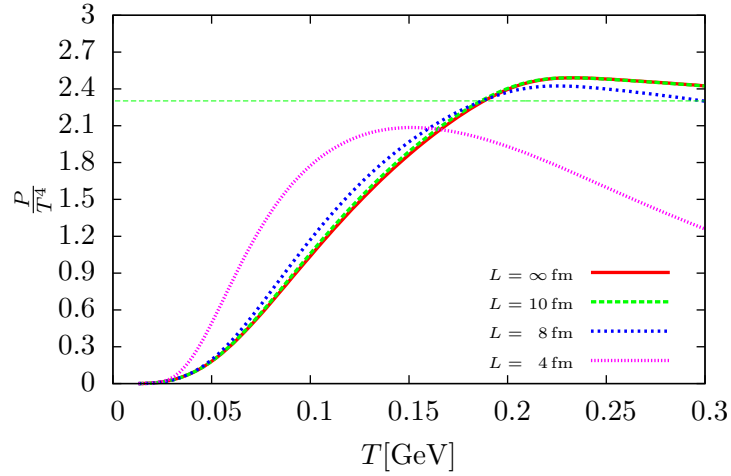


Abbildung 8.5: Reskalierte σ -Suszeptibilität in Abhängigkeit von z für verschiedene Volumina. Die Pionenmasse ist eingestellt auf (a) 200 MeV, (b) 138 MeV, (c) 75 MeV, (d) 30 MeV. Die reskalierte Suszeptibilität zeigt analoge endliche Volumen-Abhängigkeit wie χ_σ , Vergleiche Abb. 8.1 mit (b).


 Abbildung 8.6: Druck für verschiedene Volumina für $N_{max} = 4$ und $\Lambda = 3$ GeV.

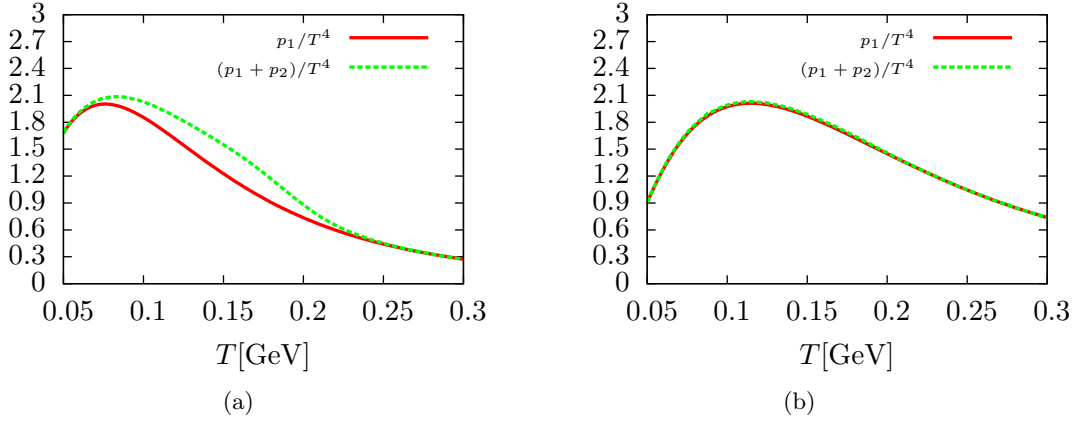
8.3 Thermodynamik in endlichem Volumen

In Kap. 7.3 untersuchten wir die UV-Cutoff-Abhängigkeit der physikalischen Größen. Wir stellten merkbare Diskrepanzen für Cutoff-Werte $\Lambda < 3$ GeV fest. Wenn wir das Quark-Meson-Modell in endlichem Volumen betrachten, so erwarten wir, dass die Cutoff-Effekte eine Volumenabhängigkeit zeigen. Die Cutoff-Effekte sollten sich dabei um so stärker bemerkbar machen, je kleiner das betrachtete Volumen ist, da sich eine Volumenverkleinerung effektiv wie eine Temperaturerhöhung auswirkt. Abb. 8.6 zeigt den thermodynamischen Druck für verschiedene Volumina und zum Vergleich für unendliches Volumen, wobei die UV-Randbedingungen so eingestellt sind, dass $f_\pi = 93$ MeV und $M_\pi = 138$ MeV im Grenzfall verschwindender Temperatur gilt. Wie Abb. (7.5) zeigt, ist ein UV-Cutoff von $\Lambda = 3$ GeV für Temperaturen bis zu $T = 300$ MeV im Grenzfall unendlichen Volumens ausreichend. Das ist im endlichen Volumen für $L < 10$ fm nicht mehr der Fall⁴

In Kap. 8.1 wurde diskutiert, dass der Anteil des thermodynamischen Druckes $\frac{p_2}{T^4}$ nur dann Beiträge zum Gesamtdruck

$$\frac{P}{T^4} = \frac{p_1 + p_2}{T^4}. \quad (8.16)$$

⁴Hier ist folgendes zu bemerken: Wenn wir davon reden, dass ein UV-Cutoff von 3 GeV zu klein ist, dann bezieht es sich nur auf die Untersuchung thermodynamischer Größen in endlichem Volumen. Die kritische Temperatur $T_{c=0}$ wurde bei einem Cutoff von 3 GeV in unendlichem Volumen bestimmt. Diese geht dann in die Scaling-Analyse ein. Ein Cutoff von 3 GeV ist daher in endlichem Volumen keineswegs zu klein, um Scaling-verhalten in endlichem Volumen zu studieren.



Abbildungung 8.7: Der Beitrag des p_2 -Anteils zum Gesamtdruck $P = p_1 + p_2$ bei $N_{max} = 4$ und $\Lambda = 3$ GeV für (a) $L = 2$ fm und (b) $L = 3$ fm. Wir sehen, dass die volumenabhängigen Massen erst ab $L \leq 3$ fm einen Beitrag zum Druck leisten.

liefert, wenn die Volumenabhängigkeit der Massen $\frac{\partial M_i}{\partial L}$ nicht vernachlässigt werden kann. Das ist aber nur der Fall für genügend kleine Volumina (bei festem $M_\pi[T = 0]$). Abb. 8.7 zeigt, dass für $M_\pi[T = 0] = 138$ MeV das erst für Volumina $L < 3$ fm der Fall ist.

Um die Thermodynamik in endlichen Volumina ohne Cutoff-Effekte adäquat diskutieren zu können, setzen wir den UV-Cutoff auf 10 GeV und betrachten eine Trunkierung mit $N_{max} = 2$ und entsprechenden UV-Randbedingungen, so dass für den Grenzfall verschwindender Temperatur $f_\pi = 93$ MeV und $M_\pi = 138$ MeV gilt. Die Resultate zeigt Abb. 8.8a für die gleichen Volumina wie in Abb. 8.6. Da eine gegebene Temperatur sich in kleineren Volumina effektiv wie eine größere verhält, ist zu erwarten, dass der Druck für $T \lesssim T_p$ ⁵ für kleinere Volumina schneller ansteigt als für größere. Das liegt an dem bei kleineren Volumina bereits bei tieferen Temperaturen einsetzenden Phasenübergang. Daraus folgt, dass der Stefan-Boltzmann-Limes für $4N_c N_f = 24$ masselose Fermionen bei kleineren Temperaturen erreicht wird, siehe Abb. 8.8b⁶.

Wir zeigen, dass aus der Druck-Gleichung für endliches Volumen und masselose Fermionen tatsächlich der Stefan-Boltzmann-Limes folgt. Dazu verwenden wir den fermionischen Teil von Gl. (8.8) für verschwindende Quarkmassen $M_Q = 0$ und den Poisson-Summen Formalismus Gl.(8.14) und erhalten für $TL \rightarrow \infty$:

⁵ T_p ist die pseudokritische Temperatur für unendliches Volumen: $T_p \approx 200$ MeV, siehe Tab. 7.2b.

⁶Oder anders formuliert: für eine gegebene Temperatur $T > T_p$ ist der Wert für $\frac{P}{T^4}$ für kleineres Volumen näher am Stefan-Boltzmann-Limes.

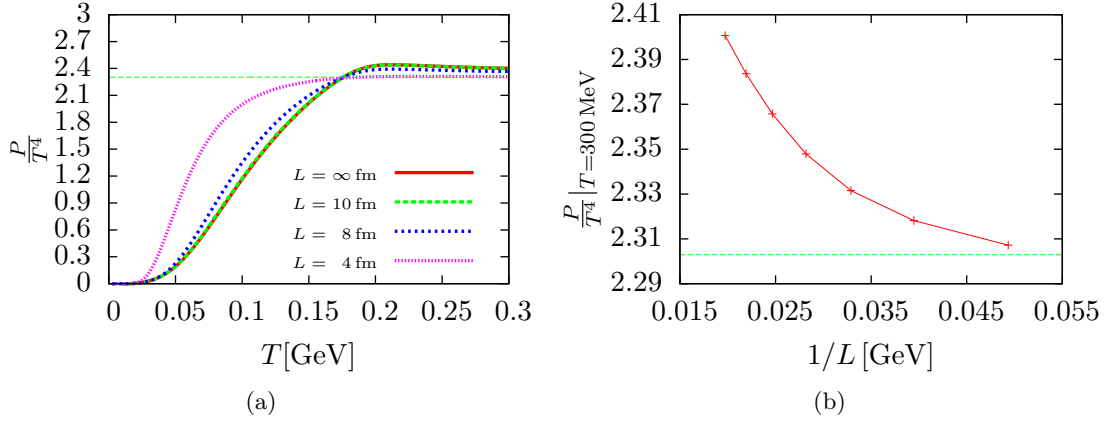


Abbildung 8.8: Druck für verschiedene Volumina für $N_{max} = 2$ und $\Lambda = 10$ GeV (b) $\frac{P}{T^4}$ für $T = 300$ MeV in Abhängigkeit von $1/L$.

$$\begin{aligned}
 \frac{p_1}{T^4} &= \frac{1}{3(TL)^3} \int d^3n' \frac{2\pi n'}{TL} \frac{4N_c N_f}{e^{2\pi n'/TL} + 1} \\
 &\stackrel{x=2\pi n'/TL}{=} \frac{1}{6\pi^2} \int_0^{x \rightarrow \infty} dx x^3 \frac{4N_c N_f}{e^x + 1} \\
 &= 4N_c N_f \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} \\
 &= 2.30291.
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Dieser Wert ist identisch mit dem Stefan-Boltzmann-Limes aus Gl. (7.27). Bei einem Volumen von $L = 4$ fm erhalten wir:

$$\frac{P}{T^4} \Big|_{T=300 \text{ MeV}} \approx 2.30721. \tag{8.18}$$

Ein analoges Verhalten zeigt die Entropie $\frac{s}{T^3}$ und die Energiedichte $\frac{\epsilon}{T^4}$, siehe Abb. 8.9. Beide Größen sind $\propto \frac{d}{dT} \left(\frac{P}{T^4} \right)$. Wir haben gesehen, dass der thermodynamische Druck $\frac{P}{T^4}$ für $M_\pi \rightarrow 0$ an der Stelle $T = \tilde{T}_c$ ein scharfes Maximum hat, welches weniger stark ausgeprägt ist, wenn wir höhere n -Punkt-Funktionen hinzunehmen, siehe Abb. 7.10b. Bestimmt man die Entropie bzw. die Energiedichte für $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$, so hat die entsprechende Kurve für $T = \tilde{T}_c$ einen starken Anstieg. Demnach sollten $\frac{s}{T^3}$ und $\frac{\epsilon}{T^4}$ ihr Maximum bei einer Temperatur $T_{\max} < \tilde{T}_c$ haben. Für z.B. die Entropie ergibt sich mit $N_{max} = 4$ und $\tilde{T}_c = 201$ MeV für die Position des Maximums: $T_{\max}^s = 176$ MeV.

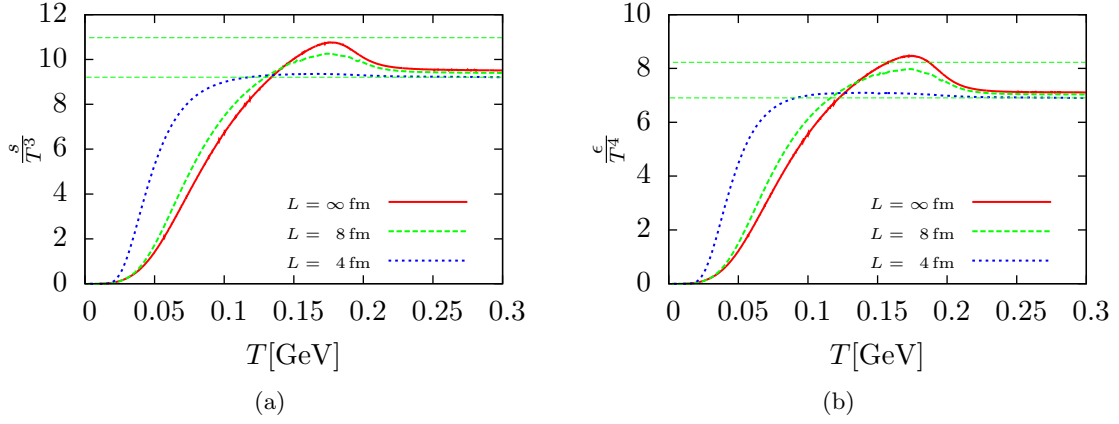


Abbildung 8.9: (a) Entropie für verschiedene Volumina für $N_{max} = 2$ und $\Lambda = 10$ GeV. Dabei liegt für $L = \infty$ das Maximum der Entropie bei $T_{max}^s = 176$ MeV. (b) Energiedichte für verschiedene Volumina $N_{max} = 2$ und $\Lambda = 10$ GeV. Dabei liegt für $L = \infty$ das Maximum der Energiedichte bei $T_{max}^\epsilon = 175$ MeV.

Mit größer werdender Pionenmasse $M_\pi[T = 0]$ glättet sich der starke Anstieg, vergleiche Abb. 8.9 und Abb. 8.10⁷.

Für die Entropie s und für die Energiedichte ϵ erhalten wir für den Stefan-Boltzmann-Limes von 24 masselosen Fermionen und 4 masselosen Bosonen folgende Werte:

$$\begin{aligned} \frac{s}{T^3} &= N_f N_c \frac{112\pi^2}{720} + 16 \frac{\pi^2}{90} \approx 10.97, \\ \frac{\epsilon}{T^4} &= N_f N_c \frac{28\pi^2}{240} + 12 \frac{\pi^2}{90} \approx 8.23. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Wie Abb. 8.9b zeigt, wird dieser Gesamt-Stefan-Boltzmann-Limes für die Energiedichte $L = \infty$ überschritten. Für kleinere Pionenmassen gilt das auch für die Entropie. Für $M_\pi \rightarrow 0$ und $N_{max} = 4$ liegt das Maximum der Entropie deutlich über dem Stefan-Boltzmann-Limit, siehe Abb. 8.10. Da dieser Effekt sowohl für $N_{max} = 2$, $N_{max} = 3$ und $N_{max} = 4$ beobachtet wird, ist anzunehmen, dass es sich hierbei um keinen Trunkierungseffekt handelt.

⁷Das gilt unabhängig von der betrachteten Trunkierung.

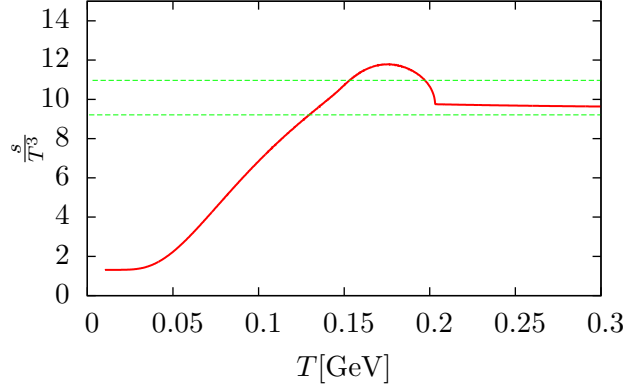


Abbildung 8.10: Entropie für $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$ und $L = \infty$ fm für die Trunkierung $N_{max} = 4$.

Mit Gl. (4.13b) erhalten wir einen Ausdruck für die Entropie:

$$\begin{aligned}
 -\partial_t s \propto & \frac{4P}{T} + \frac{T^4}{\sqrt{k^2 + M_i^2(T)}} \left(-\frac{k^5}{T^5} n_B(T, k, M_i(T)) + \frac{k^5}{T^4} \frac{\partial n_B(T, k, M_i(T))}{\partial T} \right) \\
 & + \frac{T^4}{\sqrt{k^2 + M_Q^2(T)}} \left(-\frac{k^5}{T^5} n_F(T, k, M_Q(T)) + \frac{k^5}{T^4} \frac{\partial n_F(T, k, M_Q(T))}{\partial T} \right) \\
 & + T^4 f(M_i, \frac{\partial M_i}{\partial T}, k, T) + T^4 f(M_Q, \frac{\partial M_Q}{\partial T}, k, T), \quad i \in (\pi, \sigma). \quad (8.20)
 \end{aligned}$$

Dabei sind n_B und n_F die Bose-Einstein- und Fermi-Dirac-Verteilung. Der erste Term liefert für $M_i \rightarrow 0$ den Stefan-Boltzmann-Limes, Gl.(8.19a). Mathematisch gesehen, sorgen die übrigen Terme dafür, dass der Stefan-Boltzmann-Limes überschritten werden kann.

Für den Druck $\frac{P}{T^4}$ stellt der Gesamt-Stefan-Boltzmann-Limes eine obere Schranke dar, die nicht überschritten werden kann. Ein stark wechselwirkendes Gas liefert einen kleineren Beitrag zum Druck, als es ein masseloses und wechselwirkungsfreies tun würde. Die Entropie ist mit der Anzahl der mikroskopischen Zustände, die ein System annehmen kann verknüpft. Steigt die Temperatur, so steigt auch die Anzahl der Zustände, die besetzt werden können. Im Bereich des Phasenübergangs, wo langreichweitige Korrelationen zwischen den wechselwirkenden Teilchen vorliegen, steigt die Anzahl der Mikrozustände zusätzlich. Daher wird die Entropie in der Umgebung des Phasenübergangs größer als der Stefan-Boltzmann-Limes. Die Argumentation für die Energiedichte ist analog.

z	$M_\pi = 200 \text{ MeV}$	$M_\pi = 138 \text{ MeV}$	$M_\pi = 75 \text{ MeV}$
0	1.774	2.449	4.058
z_p	1.774	2.449	4.056

Tabelle 8.2: Aus Lage des Wendepunktes von $Q_{f_\pi}(z, \tilde{h})$ bestimmten Volumina in fm bei vorgegebener Pionenmasse. Spätestens ab diesem Volumina kann man mit endlichen Volumen-Effekten z.B. bei $Q_{f_\pi}(z, \tilde{h})$ rechnen.

8.4 Scaling in endlichem Volumen

Wir werten den Ordnungsparameter f_π und die Sigma-Suszeptibilität χ_σ für sämtliche Volumina, an den Stellen $z = 0$ und $z = z_p$ aus. In Abb. 8.13 und 8.14 sind unsere Ergebnisse dargestellt in Abhängigkeit von $h = \frac{c}{H_0}$. Die explizite Symmetriebrechung c ist dabei so gewählt, dass für die Pionenmasse $10 \text{ MeV} \leq M_\pi[T = 0] \leq 200 \text{ MeV}$ gilt. Für die reskalierten Funktionen wurden für die großen Volumina $L = 10, L = 20$ und $L = 30$ fm noch 7 weitere Werte für c bis $M_\pi[T = 0] = 2 \text{ MeV}$ hinzugefügt. Man sieht in Abb. 8.13 und Abb. 8.14, dass für genügend große h die Volumenabhängigkeit der Größen f_π und χ_σ gering ist und folglich diese jeweils gegen denselben Wert konvergieren.

Die Scaling-Funktionen ergeben sich aus Gl. (5.25) und (5.26) mit $H \rightarrow h$ und $M(t, h, L) \rightarrow f_\pi(t, h, L)$:

$$Q_{f_\pi}(z, \tilde{h}) = f_\pi(t, h, L)L^{\beta/\nu}, \quad (8.21)$$

$$Q_\chi(z, \tilde{h}) = \chi_\sigma(t, h, L)L^{-\gamma/\nu}. \quad (8.22)$$

Wir konstruieren die Scalingfunktionen also durch folgende Reskalierungen⁸:

$$\begin{aligned} f_\pi &\rightarrow f_\pi L^{\beta/\nu} \\ \chi_\sigma &\rightarrow \chi_\sigma L^{-\gamma/\nu}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

und plotten diese Funktionen in Abhängigkeit der Scaling-Variable $\tilde{h} = hL^{\beta\delta/\nu}$, siehe Abb. 8.14 und Abb. 8.16. Wie zu erwarten liegen die Kurven gut übereinander. Da für kleinere h für $L = 2 \text{ fm}$ kein Phasenübergang mehr stattfindet, weichen die entsprechenden Punkte deutlich ab. Das System verbleibt im symmetrischen Regime. Aus dem Wendepunkt der Scaling-Funktionen (8.21) und (8.22) läßt sich bestimmen, ab welchen Volumen bei gegebener Pionenmasse $M_\pi[T = 0]$ bzw. expliziter Symmetriebrechung c ein Einfluss des endlichen Volumens zu erwarten ist. Wir bestimmten den Wendepunkt $\tilde{h} = \tilde{h}_{\text{WP}} \equiv \text{const}$ der Scaling-Funktion $Q_{f_\pi}(z = 0, \tilde{h})$ für $L = 30 \text{ fm}$. Wir erhalten mit $\text{const} = 0.00288566$ für vorgegebene Pionmasse die gesuchten Volumina L . Die Ergebnisse finden sich in Tab. 8.2. Es ist aber anzumerken, dass auch in der Umgebung dieses Punktes sich endliche Volumen-Effekte bemerkbar machen. Daher ist dieser Wendepunkt

⁸Für den Exponenten ν verwenden wir den Wert $\nu = 0.80$ [50].

kein exaktes Kriterium. Betrachtet man beispielsweise Abb. 8.5b, so erwartet man laut Wendepunkt für $z = z_p$ Einfluss des endlichen Volumens ab einer Volumengröße von $L = 2.49$ fm. Für $z = 0$ beobachten wir allerdings endliche Volumen-Effekte schon ab $L = 6$ fm. Ähnliches sieht man in Abb. 8.5c. Demnach stellt der Wendepunkt eine untere Schranke für endliche Volumen-Effekte dar, d.h. dass man spätestens für $L \lesssim L_{\text{WP}}[M_\pi]$, deutlich ausgeprägte Volumeneffekte zu erwarten hat.

Für den Grenzfall $L \rightarrow \infty$ sollten die Scaling-Funktionen des endlichen Volumens $Q_{f_\pi}(z, \tilde{h})$ und $Q_\chi(z, \tilde{h})$ sich denen des unendlichen Volumens annähern, siehe Kap. 5.3. Es sollte also

$$\begin{aligned} f_\pi(t, h, L \rightarrow \infty) &\propto h^{1/\delta}, \\ \chi_\sigma(t, h, L \rightarrow \infty) &\propto h^{1/\delta-1}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

bzw.

$$\begin{aligned} Q_f(t, h, L) &:= \frac{1}{h^{1/\delta}} f_\pi(t, h, L \rightarrow \infty) \Big|_{t=0} \stackrel{!}{=} f_M \Big|_{z=0} = 1, \\ Q_\chi(t, h, L) &:= \frac{H_0}{h^{1/\delta-1}} \chi_\sigma(t, h, L \rightarrow \infty) \Big|_{t=(T_{z_p}-T_{c=0})/T_0} \stackrel{!}{=} f_\chi \Big|_{z=z_p} = 0.33 \end{aligned} \quad (8.25)$$

gelten. Dabei sind f_M und f_χ die Scaling-Funktionen für den Fall unendlichen Volumens für den Ordnungsparameter f_π und die Suszeptibilität χ_σ . Unseres größtes betrachtetes Volumen beträgt $L = 30$ fm. Zur Erfüllung der Relationen (8.24) und (8.25) muss $h \rightarrow 0$ gesetzt sein und zugleich muss mindestens gelten, dass $\tilde{h} > \tilde{h}_{\text{WP}}$, um Volumeneffekte zu vermeiden. Die Relationen (8.25) werden exakt kaum erfüllt sein, da diese nur dann gelten, wenn die Scaling-Funktionen f_M und f_χ ohne Scaling-Korrekturen Geltung haben, d.h. für $M_\pi \rightarrow 0$ bzw. $h \rightarrow 0$. Für $M_\pi \rightarrow 0$ bzw. $h \rightarrow 0$ erwarten wir aber endliche Volumen-Effekte.

In Abb. 8.11 sehen wir $Q_f(t=0, h, L=30 \text{ fm})$ und zum Vergleich die Scaling-Funktion $f_M \Big|_{z=0}$ in Abhängigkeit von $M_\pi[T=0]$. Beide nähern sich $f_M \Big|_{z=0, h \rightarrow 0} = 1$ mit abnehmender Pionenmasse an. Die Funktion $Q_f(t=0, h, L=30 \text{ fm})$ allerdings fällt ab für $M_\pi \lesssim 18$ MeV und unterscheidet sich damit signifikant von f_M . Betrachtet man Q_f unter kleineren Volumina, so setzt der Unterschied bereits bei größeren Pionenmassen ein, siehe Abb. 8.11.

Wir bestimmen die Scaling-Funktion f_χ an der Stelle $z = z_p$ und vergleichen diese mit $Q_\chi(t, h, L)$ bei verschiedenen Volumina. Wir benötigen dazu die zu z_p zugehörige Temperatur. Diese ist nicht identisch mit T_p , denn wie in Abb. 7.14b dargestellt, verschiebt sich die z -Position des Peaks mit zunehmender Pionenmasse. Aus der Definition von z ,

$$z = \frac{T - T_{c=0}}{T_0} \frac{1}{h^{1/\beta\delta}}, \quad (8.26)$$

und den bereits bekannten Größen T_0 , H_0 , $T_{c=0}$ und z_p (siehe Kap. 7.5) läßt sich die zu $z = z_p$ zugehörige Temperatur T_{z_p} bestimmen. Die Resultate für $f_\chi \Big|_{z=z_p}$ und für

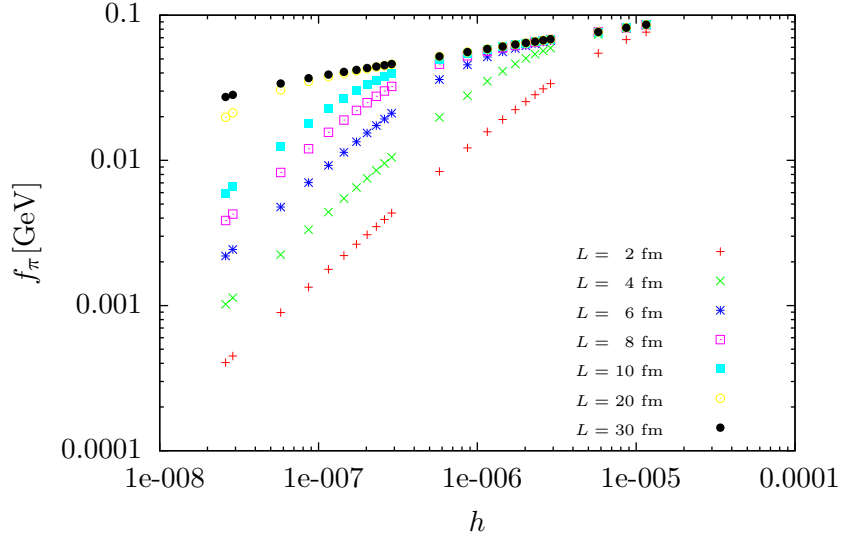
$Q_\chi(T = T_{z_p}, h, L)$ befinden sich in Abb. 8.12. Die Scaling-Funktion f_χ nähert sich für $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$ den bekannten Wert von 0.33, siehe Abb. 7.13b. Die Funktion $Q_\chi|_{L=30 \text{ fm}}$ bekommt ab $M_\pi \lesssim 18 \text{ MeV}$ einen erhöhten Anstieg. Wie uns die Funktion $Q_\chi|_{L=20 \text{ fm}}$ suggeriert, sollte die Funktion $Q_\chi|_{L=30 \text{ fm}}$ für $M_\pi \rightarrow 0$ wieder kleiner werden. Für die Relationen (8.25) sollten daher bessere Resultate erzielbar sein, wenn wir größere Volumina einstellen. Dann können die Funktionen Q_f und Q_χ für noch kleinere Pionenmassen betrachtet werden ohne dass sich endliche Volumen-Effekte bemerkbar machen.

Der δ -Exponent läßt sich aus der Relation (8.24a) bestimmen (mit $t = 0$). Wir erhalten:

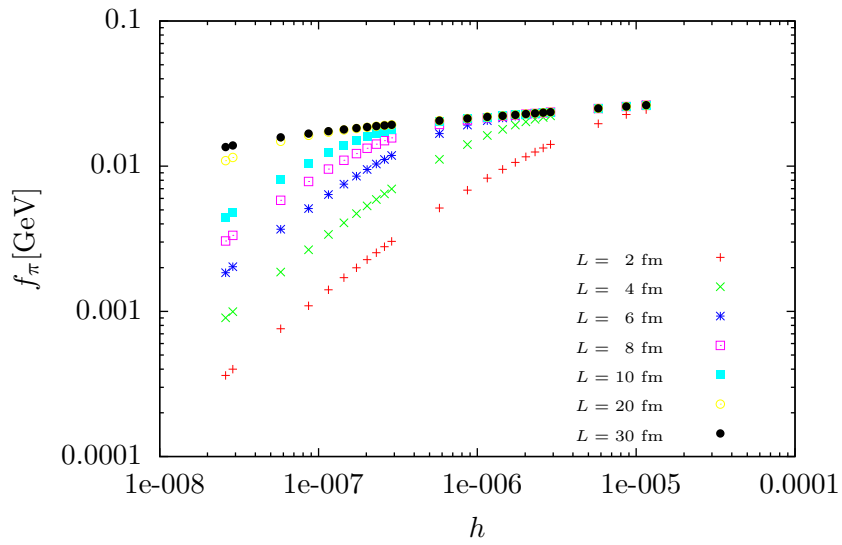
$$\delta = 4.994. \quad (8.27)$$

Prinzipiell läßt sich der δ -Exponent auch aus der Relation (8.24b) bestimmen, allerdings liegen hierfür nicht genügend Datenpunkte im relevanten Intervall vor⁹.

⁹Man beachte, dass die Suszeptibilität χ_σ die Ableitung des Ordnungsparamters f_π nach dem Feld h darstellt.

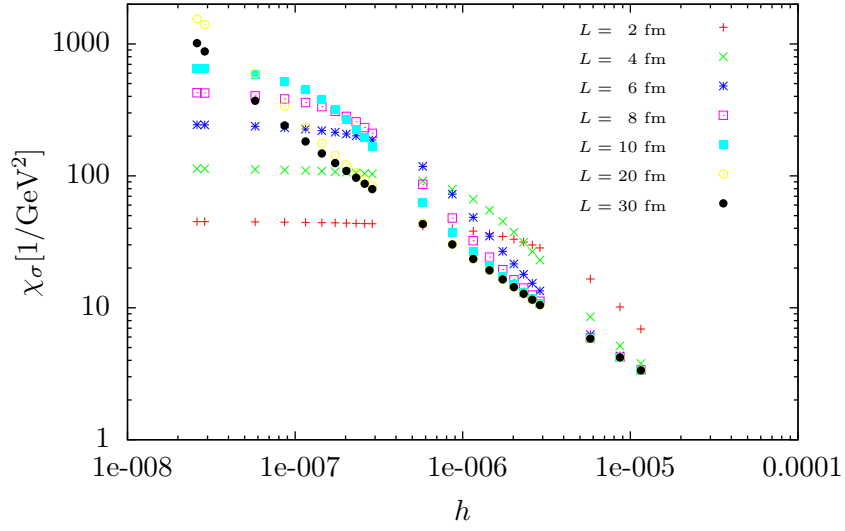


(a)

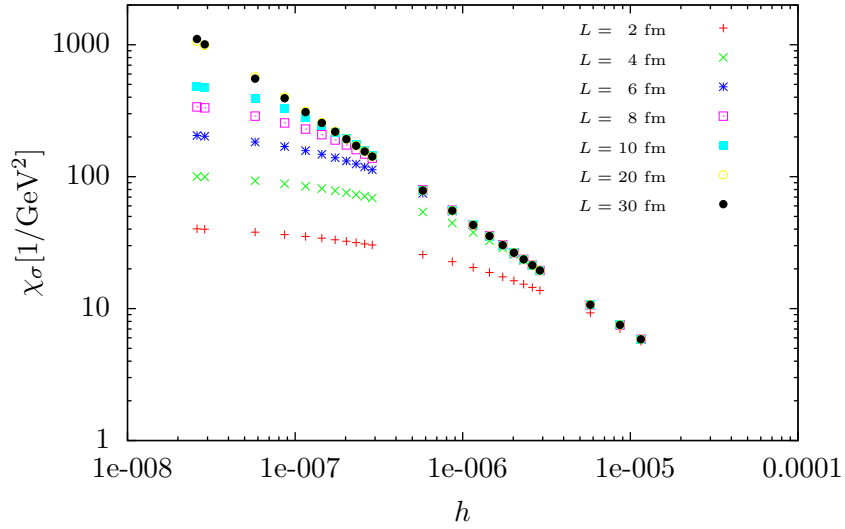


(b)

Abbildung 8.11: (a) f_π in Abhängigkeit von h für $z = 0$ und verschiedene Volumina. (b) f_π in Abhängigkeit von h für $z = z_p$ und verschiedene Volumina.

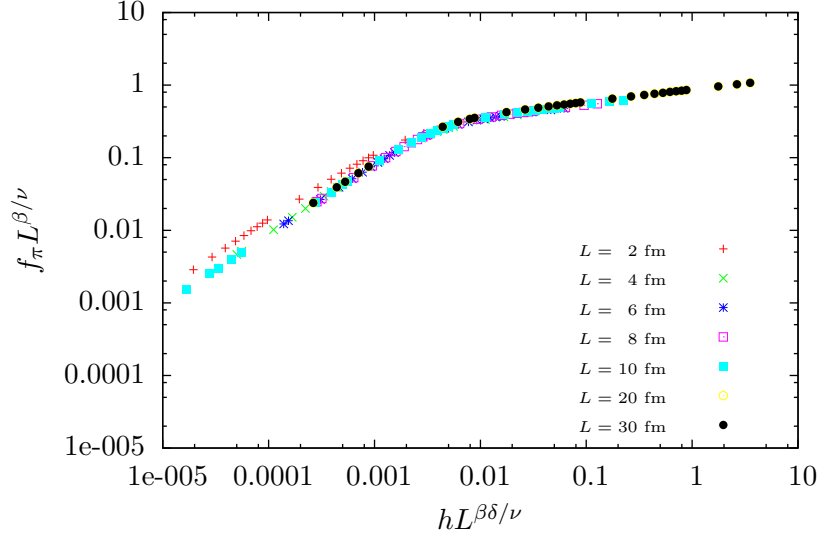


(a)

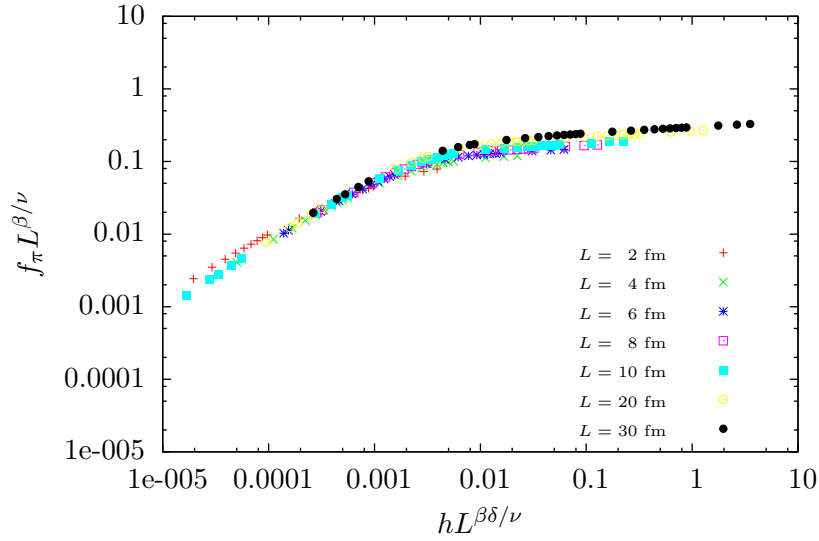


(b)

Abbildung 8.12: (a) χ_σ in Abhängigkeit von h für $z = 0$ und verschiedene Volumina. (b) χ_σ in Abhängigkeit von h für $z = z_p$ und verschiedene Volumina.

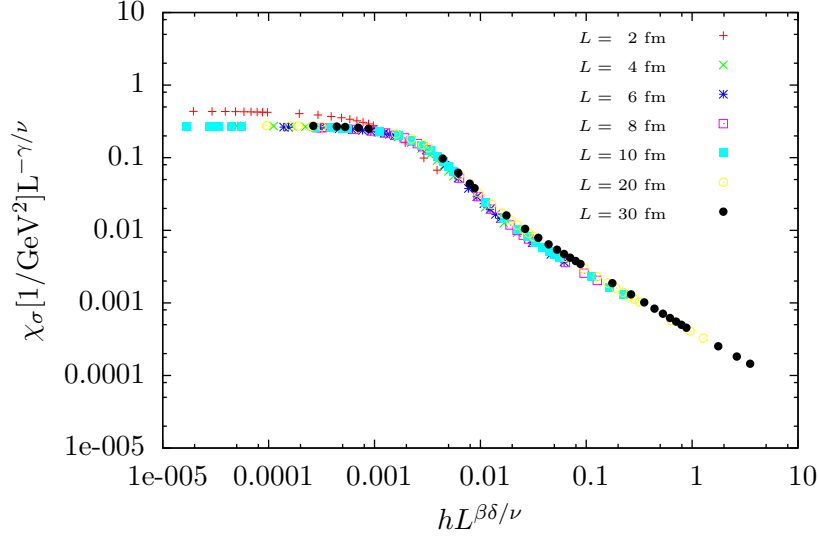


(a)

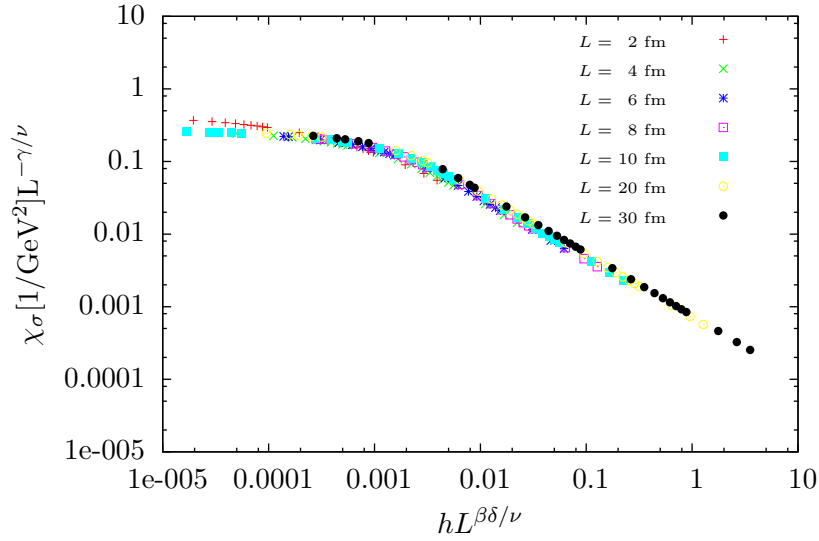


(b)

Abbildung 8.13: (a) $f_\pi L^{\beta/\nu}$ in Abhängigkeit von $h L^{\beta\delta/\nu}$ für verschiedene Volumina und $z = 0$. (b) $f_\pi L^{\beta/\nu}$ in Abhängigkeit von $h L^{\beta\delta/\nu}$ für verschiedene Volumina und $z = z_p$.

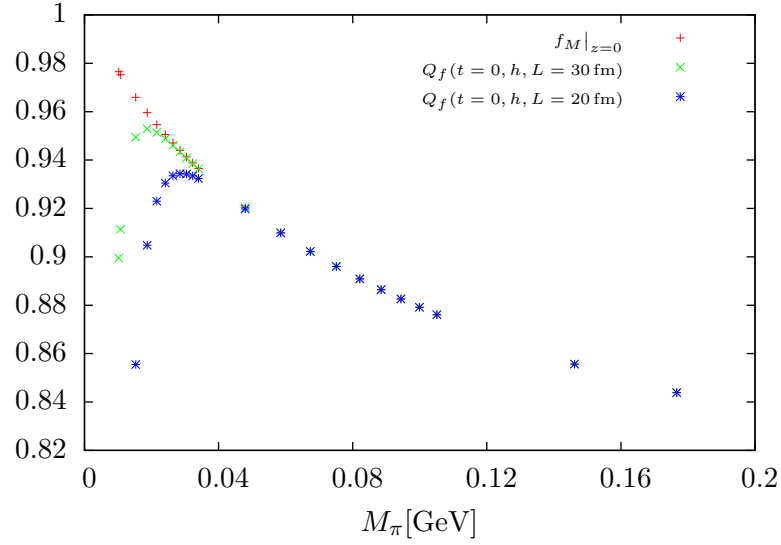


(a)

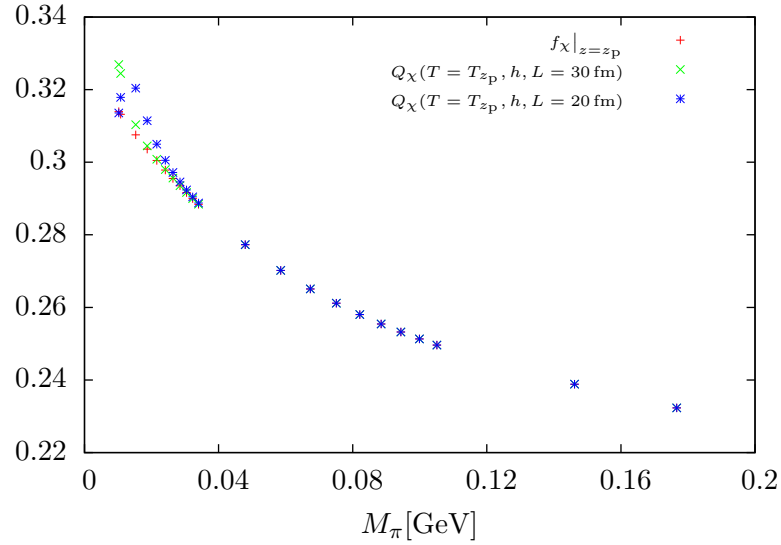


(b)

Abbildung 8.14: (a) $\chi_\sigma L^{-\gamma/\nu}$ in Abhängigkeit von $hL^{\beta\delta/\nu}$ für verschiedene Volumina und $z = 0$. (b) $\chi_\sigma L^{-\gamma/\nu}$ in Abhängigkeit von $hL^{\beta\delta/\nu}$ für verschiedene Volumina und $z = z_p$.



Abbildungung 8.15: Die Scaling-Funktion f_M für das unendliche Volumen, ausgewertet bei $z = 0$, $Q_f(t = 0, h, L = 20 \text{ fm})$ und $Q_f(t = 0, h, L = 30 \text{ fm})$ in Abhängigkeit von $M_\pi[T = 0]$.



Abbildungung 8.16: Die Scaling-Funktion f_χ für das unendliche Volumen, ausgewertet bei $z = z_p$, $Q_\chi(T = T_{z_p}, h, L = 20 \text{ fm})$ und $Q_\chi(T = T_{z_p}, h, L = 30 \text{ fm})$ in Abhängigkeit von $M_\pi[T = 0]$.

8.5 Vergleich mit Gittersimulationen

In der QCD hängt die Art des chiralen Phasenübergangs von der Anzahl der Quark-Flavor und deren Massen ab. Wir betrachten die sogenannte $(2 + 1)$ -Flavor-QCD.

Für den Fall, dass die Massen des up- und down-Quark $m_{u,d}$ und des strange-Quarks m_s masselos sind, erwartet man einen Phasenübergang erster Ordnung. Erhöht man die Masse des strange-Quarks, so erwarten wir einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Eine QCD mit $(2 + 1)$ -Flavor, verhält sich bei großer strange-Quark Masse m_s approximativ wie eine 2-Flavor QCD, da die den strange-Quark zugehörigen Propagatoren zur Renormierungsgruppenflussdynamik nur schwach beitragen. Das ermöglicht den Vergleich von $(2 + 1)$ -Flavor-QCD dem 2-Flavor-Quark-Meson-Modell. Beide haben dann für $T = T_c$ einen Phasenübergang zweiter Ordnung [51, 52, 7, 6].

Für 2-Flavor-QCD findet man in Gitter-QCD-Simulationen eine kritische Temperatur [8, 53] von

$$\begin{aligned} T_c &= 151 \text{ MeV}, \\ T_c &= 192 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Die numerischen Ergebnisse in Gitter-QCD hängen davon ab, auf welche Art und Weise Fermionen auf das Gitter gesetzt werden. Die genauen Ursachen warum sich die kritischen Temperaturen in Gl. (8.28) so stark unterscheiden sind Gegenstand aktueller Forschung. Wir erhalten eine kritische Temperatur von $T_c \approx 145 \text{ MeV}$, siehe Kap. (7.5). Wir vermuten, dass die Diskrepanz der Ergebnisse auf die in dieser Arbeit gemachten Näherungen zurückgeführt werden können. Wir vernachlässigten die Impulsabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung $Z_{\phi,p,k} = 1$ und betrachteten eine Trunkierung mit $N_{max} = 4$. Des weiteren hat das Quark-Meson-Modell keine gluonischen Freiheitsgrade. Es würde sich also lohnen in künftigen Arbeiten Impulsabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung und die gluonischen Freiheitsgrade mit einzubeziehen. In der Tat legen Studien des Polyakov-Quark-Meson-Modells bzw. Polyakov-NJL-Modells nahe, dass die kritische Temperatur des chiralen Phasenübergangs durch die Gluonen-Dynamik beeinflusst wird [54, 55, 56, 57].

In der Gitter-QCD erhält man T_c durch Extrapolation $L \rightarrow \infty$ und $M_\pi \rightarrow 0$. Eine weitere mögliche Erklärung für die Diskrepanz zwischen unserm Wert für T_c und den Gitter-QCD-Ergebnissen liegt in der Extrapolation. Jedoch ist anzunehmen, dass Extrapolationsfehler kleinere Beiträge zur Diskrepanz liefern, als die vernachlässigten gluonischen Freiheitsgrade.

In der Gitter-QCD wird von großen Pionenmassen aus extrapoliert. Beispielsweise beträgt in [58] die kleinste verwendete Pionenmasse 75 MeV . Im folgendem versuchen wir die Fehler, die durch Extrapolationen verursacht sein könnten, abzuschätzen. Betrachten wir dazu in Gl. (7.31) die Peak-Temperatur T_p . Wir nehmen an, dass die lineare Proportionalität zwischen T_p und M_π auch dann gültig ist, wenn wir große Pionenmassen

betrachten. Betrachten wir also T_p für Pionenmassen zwischen 75 MeV und 200 MeV. Wir erhalten dann aus der Extrapolation für $M_\pi = 0$ für die kritische Temperatur T_c :

$$T_{c=0} = 151 \text{ MeV}. \quad (8.29)$$

Um den Einfluss der Volumenextrapolation abzuschätzen, betrachten wir T_p für verschiedene Volumina für $M_\pi[T = 0] = 75 \text{ MeV}$, siehe Abb. 8.2 und Tab. 8.1. Nehmen wir an, dass $T_p[1/L]$ durch eine Funktion der Form

$$T_p[1/L] = T_p[0] + aL^{-n}, \quad a, n \in \mathbb{R}, \quad (8.30)$$

dargestellt werden kann. Dabei ist $T_p[0]$ die kritische Temperatur die man durch Extrapolation in das unendliche Volumen $L \rightarrow \infty$ erhält. Studieren wir das Quark-Meson-Modell in unendlichem Volumen für $N_{max} = 4$ und $M_\pi[T = 0] = 75 \text{ MeV}$, so erhalten wir für die pseudokritische Temperatur T_p :

$$T_p = 176.432 \text{ MeV}. \quad (8.31)$$

Betrachten wir $T_p[1/L]$, so stellen wir für große Volumina Konvergenzverhalten fest. Legen wir den Bereich Gl. (8.30) zu Grunde, in dem die endlichen Volumeneffekte gering bleiben ($L \geq 6 \text{ fm}$), so ergibt sich aus der Extrapolation $1/L \rightarrow 0$ eine pseudokritische Temperatur von

$$T_p = 176.412 \text{ MeV}. \quad (8.32)$$

Aus diesen Ergebnissen schließen wir, dass, zumindest im Fall von [53], die Diskrepanz zwischen den kritischen Temperaturen nicht allein durch Extrapolationsfehler $M_\pi \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ verursacht sein kann.

In [49] wurde eine geringe Abhängigkeit der (pseudo)-kritischen Temperatur von der Quarkmasse M_Q bzw. der Pionenmasse M_π festgestellt. Die Abhängigkeit der pseudokritischen Temperatur von der Pionenmasse hat die Form von Gl. (7.31) :

$$T_p(M_\pi) = \frac{T_0 z_p}{H_0^{1/\beta\delta}} \cdot M_\pi^{2/(\beta\delta)} + T(M_\pi = 0). \quad (8.33)$$

In aktuellen Gittersimulationen sind allerdings Pionenmassen $M_\pi[T = 0] \geq 75 \text{ MeV}$ verwendet worden, um diese Abhängigkeit zu studieren. Es ist nicht auszuschließen, dass die Abhängigkeit der pseudokritischen Temperaturen von der Pionenmasse für kleinere Pionenmassen zunimmt. Das wiederum hätte Einfluss auf die extrapolierte kritischen Temperatur.

Laut Gl. (7.31) gehen in den Vorfaktor von $T_p[M_\pi]$ die Normierungskonstanten T_0 und H_0 ein. Diese Konstanten sind nicht universell, sondern hängen von den konkreten

Details der Wechselwirkungen des betrachteten Modells ab. Die Normierungskonstanten wurden in Kap. 7.5 für $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$ bestimmt. Es ist zu erwarten, dass der numerische Wert von T_0 und H_0 auch von der Pionenmasse abhängt an der diese errechnet werden. Um den möglichen Fehler in der Bestimmung der Konstanten H_0 und T_0 abzuschätzen, bestimmen wir die Konstanten nicht für $M_\pi[T = 0] = 0$, sondern für $M_\pi[T = 0] = 75$ MeV. Die Werte für T_0 und H_0 müssen dabei derart gewählt werden, dass gilt:

$$\begin{aligned} f_\pi/h^{1/\delta}[z = 0] &\stackrel{!}{=} 1, \\ \chi_\sigma H_0 h^{1-1/\delta}[z_p] &\stackrel{!}{=} 0.33. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Beide Bedingungen sind nicht gleichzeitig genau erfüllbar. Für die Konstanten erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_0 &\cong 23.1 \text{ GeV}, \\ H_0 &\cong 600.0 \dots 775.2 \text{ GeV}^3. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Damit ist T_0 fast identisch mit dem aus Kap. 7.5. H_0 dagegen unterscheidet sich etwa um einen Faktor 2. Mit dieser „falschen“ Normierung, statt mit der bei $M_\pi \rightarrow 0$ bestimmten, unterscheidet sich der Vorfaktor in Gl. (7.31) nur geringfügig. Auf die Stärke der Abhängigkeit der pseudokritischen Temperatur von der Pionenmasse haben die „falsch“ bestimmten Normierungskonstanten keinen bedeutenden Einfluss. Daher wird die Ursache des festgestellten Unterschiedes der Abhängigkeit der pseudokritischen Temperatur von der Pionenmasse in der vernachlässigten Gluonendynamik liegen.

Für die $(2+1)$ -Flavor-QCD ist noch nicht genau klar, ob sie in die Universalitätsklasse $O(4)$ oder $O(2)$ einzuordnen ist. In [58] konnte nicht unterschieden werden ob die $2+1$ -flavor-QCD zur Universalitätsklasse $O(4)$ oder $O(2)$ gehört, da die $O(4)$ - und $O(2)$ -Scaling-Funktionen sehr ähnlich sind. Um zu entscheiden in welche Universalitätsklasse die $(2+1)$ - bzw. 2-Flavor-QCD gehört, müßte man Gittersimulationen für noch kleinere Pionenmassen durchführen. Das würde die Genauigkeit des Scaling erhöhen. Dadurch würde es möglich zu entscheiden, ob die numerischen-Ergebnisse auf der $O(4)$ - oder $O(2)$ -Scaling-Kurve liegen. Die Alternative bestünde darin Gitter-Simulations-Datensätze mit denen aus dieser Arbeit zu vergleichen. Stimmen die numerischen Daten überein, so wäre das ein Indiz dafür, dass die $(2+1)$ -Flavor-QCD (mit $m_s \rightarrow \infty$) der Universalitätsklasse $O(4)$ zuzuordnen ist. Hinreichend ist es allerdings noch nicht. Die numerischen Ergebnisse der Gitter-Simulationen hängen davon ab auf welche Art und Weise die Fermionen auf ein Gitter gesetzt werden. Es wäre also zu untersuchen, ob sich eine mögliche Übereinstimmung (ebenso Nichtübereinstimmung) mit einer anderen Diskretisierungsmethode wiederholen ließe. Gelingt das nicht, so ist zu klären, ob das jeweilige Resultat möglicherweise ein numerisches Diskretisierungsartefakt ist.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit behandelt die Physik des chiralen Phasenübergangs, die Thermodynamik und das kritische Verhalten nahe des Phasenübergangs des Quark-Meson-Modells. Das Quark-Meson-Modell ist ein effektives Modell der QCD nahe des chiralen Phasenübergangs. Da die genaue Natur des chiralen Phasenübergangs noch nicht endgültig geklärt ist, ist es sinnvoll mit einem effektiven Modell zu arbeiten dessen Universalitätsklasse bekannt ist. Das Quark-Meson-Modell wird der Universalitätsklasse $O(4)$ zugeordnet. Mit Hilfe der funktionalen Renormierungsgruppe haben wir das Quark-Meson-Modell in unendlichem und endlichem Volumen studiert.

Um die Dynamik der QCD in der Nähe des chiralen Phasenübergangs zu untersuchen, haben wir die UV-Randbedingungen derart gewählt, dass wir bei $T = 0$ für die Pionenzerfallskonstante und für die Pionenmasse die physikalischen Werte erhalten. Wir haben verlangt, dass für die Wahl des UV-Cutoffs $\frac{2\pi T}{\Lambda} \ll 1$ gilt. Wir sahen, dass es zu signifikanten Abweichungen der numerischen Ergebnissen kommt, wenn der Cutoff zu klein gewählt wird. Das hat Konsequenzen für die Qualität der kritischen Exponenten und des Scaling. Wir zeigten, dass es für Temperaturen bis ≈ 300 MeV genügt, einen Cutoff von $\Lambda = 3$ GeV einzustellen. Um die Flussgleichungen des Quark-Meson-Modells auszuwerten, ist man auf Trunkierungen angewiesen. Die Ergebnisse hängen von der Trunkierung ab, konvergieren aber mit zunehmender Trunkierungsordnung. Wir studierten das Quark-Meson-Modell auf endlichen Volumen bei einer Trunkierung $N_{max} = 4$.

Das Verhalten der Observablen im unendlichen Volumen hängt von der Größe der expliziten Symmetriebrechung bzw. von der Pionenmasse für $T = 0$ ab. Ist $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$, so können wir bei einer kritischen Temperatur von einem Phasenübergang zweiter Ordnung sprechen; ansonsten geht der Phasenübergang in einen Crossover über. Wir haben festgestellt, dass, solange $M_\pi[T = 0]$ nicht allzu groß wird, oberhalb der kritischen Temperatur noch Skalen existieren, in denen das System in gebrochen-symmetrischen Regime verbleibt. Diese Skalen verschwinden bei einer zweiten „kritischen Temperatur“ \tilde{T}_c . Der Wert dieser zweiten „kritischen Temperatur“ hängt von der gewählten Trunkierung ab. Der thermodynamische Druck hat für $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$ bei $T = \tilde{T}_c$ ein scharfes Maximum, welches mit größer werdender Symmetriebrechung und Trunkierung N_{max} weniger stark ausgeprägt ist. Das scharfe Maximum hat zur Folge, dass die Entropie und die Energiedichte bei $T = \tilde{T}_c$ einen steilen Anstieg hat, welcher mit größer werdender Symmetriebrechung und Trunkierung N_{max} geglättet wird.

Um Scaling-Verhalten zu studieren ist eine genaue Kenntnis der kritischen Temperatur T_c für verschwindende explizite Symmetriebrechung c und eine genaue Kenntnis der nicht universellen Normierungskonstanten H_0 und T_0 notwendig. Wir erhielten die

kritische Temperatur durch Extrapolation von Gl. (7.31) mit $c \rightarrow 0$. Mit der kritischen Temperatur war es dann möglich H_0 und T_0 zu bestimmen. Für das Quark-Meson-Modell konnten wir in der Umgebung der kritischen Temperatur Scaling-Verhalten für den reskalierten Ordnungsparameter und die reskalierte Suszeptibilität χ_σ beobachten. Für verschiedene explizite Symmetriebrechungen mit $c \rightarrow 0$ bzw. verschwindende Pionenmassen für $T = 0$ sind die zugehörigen Scaling-Funktionen identisch. Sind die Werte für den expliziten Symmetriebrechungsparameter bzw. die Pionenmassen groß, so stellen wir starke Abweichungen vom erwartenden Scaling-Verhalten fest.

Betrachten wir das Quark-Meson-Modell in endlichen Volumina, so wirkt sich das endliche Volumen signifikant auf die numerischen Ergebnisse aus, wenn $M_\pi[T = 0]L \ll 1$ gilt. Wir bestimmten die Scaling-Funktionen für $z = 0$ und $z = z_p$ für endlichen Volumina und stellten fest, dass die resultierenden Kurven für verschiedene Volumen gut übereinstimmen. Aus dem Wendepunkt der Scaling-Funktion $f_\pi L^{\beta/\nu}$ läßt sich für gegebene Pionenmasse $M_\pi[T = 0]$ das Volumen bestimmen, ab dem man spätestens mit endlichen Volumen-Effekten zu rechnen hat. Wir haben gesehen, dass sich die Scaling-Funktionen für unendliches Volumen für $z = 0$ und $z = z_p$ aus den Scaling-Funktionen für endliches Volumen für $L = 30$ fm und $M_\pi[T = 0] \gtrsim 18$ MeV rekonstruieren lassen.

Für endliche Volumina betrachteten wir die thermodynamischen Größen (von Abb. 8.10 abgesehen) ausschließlich bei der physikalischen Pionenmasse von 138 MeV. Wir haben berechnet, dass der Druck in endlichen Volumen einen zusätzlichen Term hat, der durch die Volumenabhängigkeit der Massen bedingt ist. Jedoch liefert dieser Term erst ab Volumen $L < 3$ fm signifikante Beiträge. In endlichen Volumina verhält sich eine Volumenverkleinerung effektiv wie eine Temperaturerhöhung, so dass bei kleineren Volumina der Phasenübergang bereits bei tieferen Temperaturen stattfindet. Für die Thermodynamik folgt daraus, dass der fermionische Stefan-Boltzmann-Limes für kleineres Volumen bereits bei tieferen Temperaturen erreicht wird. In endlichem Volumen wirken sich die Cutoff-Effekte auf die thermodynamischen Größen stärker aus als in unendlichem Volumen. Um z.B. das Verhalten des Stefan-Boltzmann-Limes bei kleiner werdenden Volumen zu studieren, sind die Ergebnisse bei einem UV-Cutoff von $\Lambda = 3$ GeV ungeeignet. Wir studierten daher die thermodynamischen Größen bei einem UV-Cutoff $\Lambda = 10$ GeV und einer Trunkierung von $N_{max} = 2$.

Unser Ergebnis für die kritische Temperatur im chiralen Limes $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$ unterscheidet sich von den in Gitter-Simulationen errechneten. Diese ergeben sich durch die Extrapolationen $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$. Wir führten eine Extrapolation von großen Pionenmassen durch und stellten fest, dass die Diskrepanz durch diese allein nicht erklärt werden kann. Die Extrapolation von $T_p[1/L]$ mit $L \rightarrow \infty$ weist keinen signifikanten Unterschied auf zum numerischen Wert der pseudokritischen Temperatur $T_p[L = \infty]$. Damit hat die Extrapolation $T_p[1/L]$ mit $L \rightarrow \infty$ keinen wesentlichen Einfluss auf den numerischen Wert der kritische Temperatur im chiralen Limes.

Die pseudokritische Temperatur des Quark-Meson-Modells weist eine starke Abhängigkeit von der bei $T = 0$ eingestellten Pionenmasse auf. Gittersimulationen konnten nur ei-

ne schwache Abhängigkeit feststellen. Unsere Vermutung, dass die bei großen Pionmassen bestimmten Normierungskonstanten H_0 und T_0 einen möglichen Beitrag zum Unterschied liefern könnte, konnte nicht bestätigt werden. Die Normierungskonstanten unterscheiden sich nicht stark, von denen bei $M_\pi[T = 0] \rightarrow 0$ bestimmten.

Daher ist es sehr wahrscheinlich, dass die Unterschiede der Ergebnisse des Quark-Meson-Modells zur Gitter-QCD ihre Ursache zu großen Anteilen in der nicht vorhandenen Gluondynamik und in der Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung haben. Die Untersuchung des Einflusses der Gluondynamik und der Wellenfunktionsrenormierung ist daher der nahe liegende nächste Schritt in unserer Untersuchung von kritischer Dynamik in endlichen Volumen. Mit Hilfe von Dyson-Schwinger-Gleichungen wurden erste Schritte in diese Richtung unternommen [59]. Des weiteren wäre es interessant das Quark-Meson-Modell bei endlichem chemischen Potential [60] zu studieren und zu untersuchen, ob und wie sich z.B. die Position des (tri)kritischen Punktes unter Variation des Volumens ändert .

Um zu klären, ob die $(2 + 1)$ -Flavor-QCD eventuell in die $O(4)$ Universalitätsklasse eingeordnet werden kann, könnte man die in dieser Arbeit gewonnenen numerischen Daten mit denen aus Gitter-Simulationen [58] vergleichen [61].

Literatur

- [1] D. E. Kharzeev, J. Raufeisen. High energy nuclear interactions and QCD: an introduction. 2002. arXiv:nucl-th/0206073v1.
- [2] Povh, Rith, Scholz, Zetsche. *Teilchen und Kerne*. Springer, 2001.
- [3] D.J. Gross, F. Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. 1973. Phys. Rev. Lett. Vol. 30, N. 26.
- [4] H.D. Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? 1973. Phys. Rev. Lett. Vol. 30, N. 26.
- [5] S. Bethke. α_s at Zinnowitz 2004. 2004. arXiv:hep-ex/0407021v1.
- [6] R.D. Pisarski, F. Wilczek. Remarks on the chiral phase transition in chromodynamics. 1984. Phys. Rev. D Vol. 29 N. 2.
- [7] S. Gavin, A. Gocksch, R.D. Pisarski. QCD an the chiral critical point. 1994. Phys. Rev. D Vol. 49 N. 7.
- [8] Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz, K.K. Szabo. The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit. 2008. hep-lat/0609068v2.
- [9] K. Rajagopal. The chiral phase transition in QCD: critical phenomena and long wavelength pion oscillations. 1995. hep-ph/9504310v2.
- [10] H. Gies. Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories. 2006. arXiv:hep-ph/0611146v1.
- [11] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich. Non-Perturbative Renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics. 2000. arXiv:hep-ph/0005122v1.
- [12] C. Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. 1993. Phys. Lett. B 301 (1991) S. 90-94.
- [13] C. Wetterich, N. Tetradis. Critical Exponents from the Effective Average Action. 1993. arXiv:hep-ph/9308214v1.
- [14] J. Braun. Functional Renormalization Group Methods in Quantum Chromodynamics. 2006. (Dissertation).
- [15] O. Bohr, B.J. Schäfer, J. Wambach. Renormalization Group Flow Equations and the Phase Transition in $O(N)$ -models. 2000. arXiv:hep-ph/0007098v1.
- [16] O. Bohr. Renormierungsgruppen Flussgleichungen und der chirale Phasenübergang. 2001. (Dissertation).
- [17] V. Koch. Aspects of chiral Symmetry. 2008. nucl-th/9706075v2.

- [18] M. Peskin, D. Schröder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [19] Quang Ho-Kim, Pham Xuan Yem. *Elementary Particles and their Interactions*. Springer, 1998.
- [20] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] Joseph Kapusta. *Finite-Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [22] Michel Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [23] R. Dolan, R. Jackiw. Symmetry behavior at finite temperature. 1974. Phys. Rev. D Vol.9 N.12, S. 3320-3341.
- [24] Ashok Das. Topics in Finite Temperature Field Theory. 2000. arXiv:hep-ph/0004125v1.
- [25] T. Altherr. Introduction to Thermal Field Theory. 1993. arXiv:hep-ph/9307277v1.
- [26] K. Wilson, J. Kogut. The Renormalization Group and the ϵ -Expansion. 1974. Phys. Rept. 12:75-200.
- [27] J. Braun, B. Klein. Finite-size behavior in the $O(4)$ -model. 2008. arXiv:hep-ph/0810.0857v1.
- [28] J. Braun, B. Klein. Scaling functions for the $O(4)$ -model in $d = 3$ -dimensions. 2007. arXiv:hep-th/0712.3574v1.
- [29] S. Holtmann. Kritisches Verhalten und Skalenfunktionen des dreidimensionalen $O(2)$ -Spinmodells. 2000. (Diplomarbeit).
- [30] S. Holtmann. Goldstone-modes effects and critical behaviour of QCD with 2 light quark flavours. 2004. (Dissertation).
- [31] M. Fisher. The renormalization group in the theory of critical behaviour. 1974. Review of Modern Physics Vol. 46 N. 4.
- [32] M. Fisher. Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics. 1988. Review of Modern Physics Vol. 70 N. 2.
- [33] B. Stokic, B. Friman, K. Redlich. The functional renormalization group and $O(4)$ -scaling. 2008. arXiv:hep-ph/0904.0466v1.
- [34] Nigel Goldenfeld. *Lectures on Phase Transition and the Renormalization Group*. Perseus Books, 1992.

- [35] John Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 1996.
- [36] J. Goldstone, A.Salam, S.Weinberg. Broken Symmetries. 1962. Phys. Rev. Vol. 127 N.3 S. 965-970.
- [37] H. Leutwyler. Light Quark Masses. 1996. arXiv:hep-ph/9609467v1.
- [38] J.P. Blaizot, A. Ipp. Perturbation theory and non-perturbative renormalization flow in scalar field theory at finite temperatur. 2006. arXiv:hep-ph/0610004v2.
- [39] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 6: Statistische Physik*. Springer, 2002.
- [40] S. G. Brush. History of the Lenz-Ising-Model. 1967. Reviews of Modern Physics Vol. 39 N. 4.
- [41] B.A. Cipra. An Introduction to the Ising-Modell. 1987. The American Mathematical Monthly Vol. 94 N. 10, S. 937-959.
- [42] N.D. Mermin, H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models. 1966. Phys. Rev. Lett. 17. 1133-1136 .
- [43] R. Griffiths. Thermodynamik functions for fluids and ferromagnets near the critical point. 1967. Phys. Rev. Vol. 158 N. 1 S. 176-187.
- [44] D. Litim. Optimized renormalization group flows. 2001. Phys. Rev. D Vol. 64, 105007.
- [45] K, Kanaya, S. Kaya. Critical exponents of a three dimensional $O(4)$ spin modell. 1994. hep-lat/9409001v1.
- [46] B.J. Schäfer, H.J.Pirner. Renormalization Group Flow and Equation of State of Quarks and Mesons. 1999. arXiv:nucl-th/9903003v1.
- [47] G.Papp, B.J. Schäfer, H.J. Pirner, J. Wambach. On the Convergence of the Expansion of Renormalization Grop Flow Equation. 2006. arXiv:hep-ph/9909246v3.
- [48] J.Braun, B. Klein, H.J. Pirner, A.H. Rezaeian. Volume and Quark-Mass Dependence of the Chiral Phase Transition. 2008. arXiv:hep-ph/0512274v2.
- [49] F. Karsch, R. Laermann, A. Peikert. Quark Mass and Flavor Dependence of the QCD-Phase Transition. 2000. arXiv:hep-lat/0012023v1.
- [50] D. Litim, J.M. Pawłowski. Predictive power of renormalization group flows: a comparison. 2001. arXiv:hep-th/0107020v1.

- [51] F. Karsch, R. Laermann. Thermodynamics and in-medium hardron properties from lattice-QCD. 2008. arXiv:hep-lat/0305025v1.
- [52] F. Karsch. Lattice QCD at high temperature and density. 2001. arXiv:hep-lat/0106019v2.
- [53] M. Cheng, N.H. Christ, S. Datta u.a. The transition temperature in QCD. 2008. hep-lat/0608013v3.
- [54] K. Fukushima. Chiral effective model with the Polyakov loop. 2004. arXiv:hep-ph/0310121.
- [55] C. Ratti, M.A. Thaler, W. Weise. Lattice thermodynamics and a field theoretical model. 2005. arXiv:hep-ph/0506234.
- [56] B.J. Schäfer, J.M. Pawłowski, J. Wambach. The Phase Structure of the Polyakov-Quark-Meson-Model. 2007. arXiv:hep-ph/0704.3234.
- [57] J. Braun, L.M. Haas, F. Marhauser, J. M. Pawłowski. On the relation of quark confinement and chiral symmetry breaking. 2009. arXiv:hep-ph/0908.0008.
- [58] F. Karsch, R. Laermann u.a. On the magnetic equation of state in (2+1)-flavor QCD. 2009. arXiv:hep-lat/0909.5122v1.
- [59] J. Luecker, C. Fischer, R. Williams. Volume behavior of quark condensate, pion mass and decay constant from Dyson-Schwinger equations. 2010. arXiv:hep-ph/0912.3686v2.
- [60] B.J. Schäfer, J. Wambach. The Phase Diagramm of the Quark-Meson Model. 2005. arXiv:nucl-th/0403039v2.
- [61] J. Braun, B. Klein, P. Piasecki. On the scaling behavior of the chiral phase transition in QCD in finite and infinite volume. In preparation.

Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Dr. Holger Gies für die Möglichkeit, dass ich in der Quantenfeldtheorie-Arbeitsgruppe eine Diplomarbeit anfertigen konnte. Für die ausgezeichnete Betreuung möchte ich mich recht herzlich bei Dr. Jens Braun bedanken. Die angenehme Arbeitsatmosphäre und die zahlreichen Diskussionen haben wesentlich zum Erfolg dieser Arbeit beitragen. Für das Lektorat dieser Diplomarbeit bedanke ich mich bei Dr. Bertram Klein und Lars Rößler.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 15.Mai 2010.

Piotr Piasecki